دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده مهندسی هوافضا

رساله دکتری
گرایش دینامیک پرواز و کنترل

عنوان

توسعه و پیاده‌سازی فیلترهای چندمدلی در فرود خودکار پرنده بدون سرنشین جهت شناسایی برخط و جبرانسازی اغتشاشات اتمسفری

نگارش
علیرضا شریفی

استاد راهنما
دکتر هادی نوبهاری

تابستان ۱۳۹۹

تصویب‌نامه

به نام خدا
دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده مهندسی هوافضا

رساله دکتری

این رساله به عنوان تحقق بخشی از شرایط دریافت درجه دکتری است.

عنوان: توسعه و پیاده‌سازی فیلترهای چندمدلی در فرود خودکار پرنده بدون سرنشین جهت شناسایی برخط و جبرانسازی اغتشاشات اتمسفری

نگارش: علیرضا شریفی

کمیته ممتحنین:

استاد راهنما: دکتر هادی نوبهاری امضا:

استاد ممتحن داخلی: دکتر سید حسین پورتاک‌دوست امضا:

استاد ممتحن داخلی: دکتر افشین بنازاده امضا:

استاد ممتحن خارجی: دکتر حامد مرادی امضا:

استاد ممتحن خارجی: دکتر امیرعلی نیکخواه امضا:

تاریخ: ۱۳۹۹/۵/۵

اظهارنامه

(اصالت متن و محتوای رساله دکتری)

عنوان رساله: توسعه و پیاده‌سازی فیلترهای چندمدلی در فرود خودکار پرنده بدون سرنشین جهت شناسایی برخط و جبرانسازی اغتشاشات اتمسفری

نام استاد راهنما: دکتر هادی نوبهاری

اینجانب علیرضا شریفی اظهار می‌دارم:

۱- متن و نتایج علمی ارائه شده در این رساله اصیل بوده و منحصراً توسط اینجانب و زیر نظر استاد راهنما نامبرده شده در بالا تهیه شده است.

۲- متن رساله به این صورت در هیچ جای دیگری منتشر نشده است.

۳- متن و نتایج مندرج در این رساله، حاصل تحقیقات اینجانب به عنوان دانشجوی دکتری دانشگاه صنعتی شریف است.

۴- کلیه مطالبی که از منابع دیگر در این رساله مورد استفاده قرار گرفته، با ذکر مرجع مشخص شده است.

نام دانشجو: علیرضا شریفی

تاریخ: ۹۹/۵/۵

امضا:

نام استاد راهنما: دکتر هادی نوبهاری

تاریخ: ۹۹/۵/۲۵

امضا:

نام دانشجو: علیرضا شریفی

تاریخ: ۹۹/۵/۵

امضا:

تقدیم به مولایم

حضرت زهرا (س)

علمدار کربلا حضرت عباس (ع)

و پدر و مادر بزرگوارم

تشکر و قدردانی

خداوند بزرگ را به سبب همه‌ی الطافش شکرگزارم که بزرگ‌ترین داشته‌ام خود اوست. بر خود لازم می‌دانم از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر هادی نوبهاری به پاس زحماتی که برای این شاگرد کوچکشان کشیدند، کمال تشکر را بنمایم. چه بسیار آموزه‌هایی که در زمینه‌های مختلف علمی، اخلاقی و انسانی از ایشان فراگرفتم و یقیناً توفیق شاگردی ایشان برای بنده لطفی الهی بود و به این خاطر بر خود می‌بالم. بسیاری از موفقیت‌هایم در دوره کارشناسی ارشد و دکتری را مدیون زحمات این بزرگوار هستم. برای ایشان و خانواده‌ی محترمشان سلامتی، عزت و سربلندی را در همه‌ی مراحل زندگی آرزومندم و امیدوارم بتوانم حق شاگردی ایشان را به‌خوبی ادا کنم.

مراتب تشکر بی‌پایان خود را از زحمات جناب آقای دکتر حامد محمدکریمی و دکتر سعید نصراللهی ابراز می‌دارم؛ چرا که راهنمایی‌های ارزشمند ایشان، در فائق‌آمدن بر چالش‌های این پژوهش بسیار راه‌گشا بود. همچنین، شایسته است از زحمات دوستان عزیزم آقایان احسان هادی‌زاده، حسن نامداری، سعید ولیان، محمد شوکتیان و علی‌محمد رستگار تشکر کنم. امیدوارم بتوانم روزی پاسخگوی این همه لطف و بزرگواری ایشان باشم.

همچنین، از زحمات پدر و مادر مهربانم که همواره دعای خیرشان سبب پیشرفت اینجانب در تمام دوران زندگی‌ام شده‌است، صمیمانه تشکر می‌کنم. از خداوند متعال سلامتی، عزت، سربلندی و طول عمر را برای این بزرگواران را مسئلت دارم و امیدوارم دِینی را که به گردن بنده دارند به درستی ادا کنم.

توسعه و پیاده‌سازی فیلترهای چندمدلی در فرود خودکار پرنده بدون سرنشین جهت شناسایی برخط و جبرانسازی اغتشاشات اتمسفری

چکیده

در این پژوهش، استفاده از رویکرد تخمین چندمدلی به‌منظور شناسایی برخط نوع مدل باد، پارامترهای آن و نیز متغیرهای حالت یک پرنده بدون سرنشین بال‌ثابت بدون اندازه‌گیری مستقیم از حسگر سرعت هوا، و جبران‌سازی آن توسط کنترل پیش‌بین غیرخطی ابتکاری مورد توجه قرار گرفته‌است. به این‌منظور، روش فیلتر کالمن توسعه‌یافته چندمدلی استاتیکی شامل چهار فیلتر به‌منظور تخمین باد ثابت، باد "1-cosine"، باد برشی و مایکروبرست استفاده شده‌است که هر فیلتر با یک مدل باد منطبق شده و به‌صورت جداگانه کار می‌کند. همچنین، یک فیلتر چندمدلی ابتکاری، که فیلتر چندمدلی توسعه‌یافته مبتنی بر سیستم پیوسته اجتماع مورچه‌ها نامیده می‌شود، با الهام‌گیری از هوش جمعی مورچه‌ها به‌منظور پوشش مسائل چندمدلی توسعه داده شده‌است. در گام بعد، مشاهده‌پذیری متغیرهای حالت و مولفه‌های باد تحلیل شده‌است. به این‌منظور، چهار قضیه جدید برای سیستم‌های خطی پیوسته و گسسته زمان معرفی و اثبات شده‌است. به‌علاوه، مشاهده‌پذیری پارامترهای باد با استفاده از تئوری مشاهده‌پذیری سیستم‌های غیرخطی بررسی شده‌است. در مرحله بعد، جبران‌سازی نتایج تخمین در حلقه‌های کنترل‌کننده پیش‌بین ابتکاری غیرخطی مبتنی بر بهینه‌سازی گروهی ذرات انجام شده‌است. همچنین، اثبات پایداری این کنترل‌کننده انجام شده‌است. در نهایت، عملکرد فیلترهای چندمدلی و نیز کنترل‌کننده پیش‌بین ابتکاری به‌منظور اعتبارسنجی توانایی پیاده‌سازی زمان‌حقیقی با انجام شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه بررسی شده‌است. نتایج حاکی از بهبود فرآیند فرود خودکار پرنده بال‌ثابت در صورت جبران‌سازی مدل باد در کنترل‌کننده پیش‌بین غیرخطی ابتکاری است.

واژه‌های کلیدی:

پرنده بدون سرنشین، مدل باد، تخمین باد، فیلتر چند مدلی، فیلتر ابتکاری، مشاهده‌پذیری غیرخطی، کنترل‌کننده پیش‌بین، شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه.

علیرضا شریفی، "توسعه و پیاده‌سازی فیلترهای چندمدلی در فرود خودکار پرنده بدون سرنشین جهت شناسایی برخط و جبرانسازی اغتشاشات اتمسفری"، رساله دکتری، استاد راهنما: دکتر هادی نوبهاری، دانشگاه صنعتی شریف، دانشکده مهندسی هوافضا، تابستان ۱۳۹۹

فهرست عناوین

صفحه

صفحه

فهرست اشکال

صفحه

فهرست جداول

فهرست علائم

O_{xyz}	مرکز جرم پرنده
$\mathbf{p}^{N}$	موقعیت پرنده در سیستم مختصات NED
$\mathbf{v}_{g}^{B}$	سرعت انتقالی پرنده نسبت به سیستم مختصات NED بیان‌شده در سیستم مختصات بدنی
$\boldsymbol{\omega}_{NB}^{B}$	سرعت زاویه‌ای قاب بدنی نسبت به سیستم مختصات NED بیان‌شده در سیستم مختصات بدنی
ϕ	زاویه رول
θ,	زاویه پیچ
ψ	زاویه یاو
m	جرم پرنده
$\mathbf{C}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{N}}$	ماتریس کسینوس‌های هادی
$\mathbf{J}$	ماتریس ممان اینرسی
J_{xx}	ممان اینرسی اصلی
J_{yy}	ممان اینرسی اصلی
J_{zz}	ممان اینرسی اصلی
J_{xz}	ممان اینرسی ضربی
$\mathbf{f}^{B}$	برآیند نیروهای خارجی اعمالی به پرنده
$\mathbf{f}_{g}^{N}$	نیروی جاذبه بیان‌شده در سیستم مختصات NED
$\mathbf{f}_{a}^{B}$	نیروی آیرودینامیکی بیان‌شده در سیستم مختصات بدنی
S	سطح مرجع (بال)

ρ	چگالی
$\bar{c}$	میانگین وتر آیرودینامیکی
b	طول بال
V_a	نشان‌دهنده سرعت هوا
$\mathbf{v}_{\mathrm{a}}^{\mathbf{B}}$	سرعت پرنده نسبت به باد بیان‌شده در سیستم مختصات بدنی
$\mathbf{v}_{\mathrm{w}}^{\mathbf{N}}$	سرعت باد بیان‌شده در سیستم مختصات NED
α	زاویه حمله
β	زاویه لغزش جانبی
C_{x_i}	ضریب آیرودینامیکی طولی بی بعد
C_{z_i}	ضریب آیرودینامیکی طولی بی بعد
C_L	ضریب لیفت
C_D	ضریب درگ
C_{y_i}	ضرایب نیروی آیرودینامیک عرضی
$\mathbf{f}_{\mathrm{p}}^{\mathbf{B}}$	نیروی جلوبرنده
T	برآیند نیروی تراست
δ_t	تنظیم تراتل
δ_e	انحراف سطح کنترلی الویتور
δ_a	انحراف سطح کنترلی الرون
δ_r	انحراف سطح کنترلی رادر
$\mathbf{m}^{\mathbf{B}}$	بردار گشتاور آیرودینامیکی

C_{m_i} ضرایب گشتاور آیرودینامیکی طولی

C_{ℓ_i} ضرایب گشتاور آیرودینامیکی عرضی

C_{n_i} ضرایب گشتاور آیرودینامیکی عرضی

$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{a}}^{\mathbf{B}}$ سرعت‌زاویه‌ای پرنده نسبت به باد بیان‌شده در سیستم مختصات بدنی

$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{w}}^{\mathbf{N}}$ سرعت‌زاویه‌ای باد نسبت به سیستم مختصات NED

h ارتفاع پرنده از سطح زمین

$\boldsymbol{v}$ بردار نویز اندازه‌گیری

$\mathbf{v}_{\mathrm{w}}^{\mathbf{B}}$ سرعت‌های خطی باد بیان‌شده در سیستم مختصات بدنی

$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{w}}^{\mathbf{B}}$ سرعت‌های زاویه‌ای باد بیان‌شده در سیستم مختصات بدنی

ω_i نویز فرآیند

$\mathbf{x}_{\mathrm{lon}}$ بردار متغیرهای حالت مرتبط با کانال طولی

$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{lon}}$ بردار متغیرهای ورودی مرتبط با کانال طولی

$\mathbf{d}_{\mathrm{lon}}$ بردار ورودی‌های نامعلوم مرتبط با کانال طولی

$\mathbf{x}_{\mathrm{lat}}$ بردار متغیرهای حالت مرتبط با کانال عرضی

$\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{lat}}$ بردار متغیرهای ورودی مرتبط با کانال عرضی

$\mathbf{d}_{\mathrm{lat}}$ بردار ورودی‌های نامعلوم مرتبط با کانال عرضی

$\mathbf{v}_{\mathrm{w}_{\mathrm{d}}}$ مدل‌های باد معین

$\mathbf{v}_{\mathrm{w}_{\mathrm{s}}}$ مدل‌های باد تصادفی

$w_{n_{\mathrm{d}}}$ مولفه باد معین در جهت شمال

$w_{e_{\mathrm{d}}}$ مولفه باد معین در جهت شرق

w_{d_d}	مولفه باد معین در جهت جنوب
v_m	اندازه باد "1-cosine"
d_m	طول موج باد "1-cosine"
$w_{9.15}$	سرعت باد در ارتفاع ۹/۱۵ متر
w_{20}	سرعت باد اندازه‌گیری‌شده در ارتفاع ۲۰ فوت
z_0	۰/۱۵ فوت برای فاز پروازی C و ۲ فوت برای سایر فازها
ψ_{wind}	جهت بردار باد نسبت به شمال
α_{mb}	مقدار متغیر شکل‌دهی
λ	ضریب مقیاس
r_{max}	فاصله شعاعی متناظر با حداکثر سرعت افقی
h_{max}	ارتفاع متناظر با حداکثر سرعت افقی
u_{max}	اندازه متناظر با حداکثر سرعت افقی
(x_c, y_c)	مرکز مایکروبرست
$\mathbf{P}_{w_s}$	کواریانس
σ_u	شدت توربولانس در امتداد محور x بدنی
σ_v	شدت توربولانس در امتداد محور y بدنی
σ_w	شدت توربولانس در امتداد محور z بدنی
L_u	طول موج توربولانس در امتداد محور x بدنی
L_v	طول موج توربولانس در امتداد محور y بدنی
L_w	طول موج توربولانس در امتداد محور z بدنی

$\mathbf{x}$	متغیرهای حالت
$\boldsymbol{\delta}$	ورودی‌های کنترلی
$\mathbf{d}$	ورودی‌های نامعلوم
$\mathbf{A}$	ماتریس سیستم
$\mathbf{B}$	ماتریس ورودی‌های کنترل
$\mathbf{B}_d$	ماتریس ورودی‌های نامعلوم
$\mathbf{C}$	ماتریس خروجی
$\mathbf{D}$	ماتریس پیش‌خور ورودی معلوم
$\mathbf{D}_d$	ماتریس پیش‌خور ورودی نامعلوم
n	تعداد متغیرهای حالت
$\mathbf{O}_n$	ماتریس مشاهده‌پذیری
$\mathbf{W}_\mathbf{d}$	ماتریس معکوس‌پذیری ورودی‌های نامعلوم
n_d	تعداد ورودی‌های نامعلوم
$\mathbf{O}_\mathbf{d}$	ماتریس مشاهده‌پذیری ورودی‌های نامعلوم
$\mathbf{W}'_\mathbf{d}$	ماتریس معکوس‌پذیری ورودی‌های نامعلوم مرتبط با اولین تا nامین مشتق زمانی از ورودی نامعلوم
$\mathbf{x}_{a_0}$	مقدار اولیه بردار متغیر حالت افزونه
$\mathbf{O}_{nd}$	ماتریس مشاهده‌پذیری توأمان متغیرهای حالت و ورودی‌های نامعلوم
$\boldsymbol{\varepsilon}$	خطاهای خطی‌سازی سیستم غیرخطی
$\mathbf{E}_n$	ماتریس خطای سیستم خطی‌شده

$\mathbf{m}$	بردار مرتبط با بزرگترین مقدار مشتق مرتبه دوم سیستم غیرخطی مورد نظر در یک نقطه مشخص
$\mathbf{f}$	مدل غیرخطی سیستم
$\mathbf{B_d}(t)$	ماتریس متغیر با زمان ورودی‌های نامعلوم
$\mathbf{O_d}(t)$	ماتریس مشاهده‌پذیری متغیر با زمان ورودی‌های نامعلوم
$\mathbf{l}_\mathrm{n}$	مشتق لی بردار خروجی نسبت به $\mathbf{f}$
$\mathbf{d}$	بردار سرعت باد در سیستم مختصات جغرافیایی
m	m–امین مدل از مجموعه M مدل
δ	ورودی کنترلی
k	گام زمانی نمونه‌برداری
$\boldsymbol{\omega}_k$	نویز فرآیند
$\boldsymbol{v}_\mathrm{k}$	نویز اندازه‌گیری
$\mathbf{Q}$	ماتریس کواریانس نویز فرآیند
$\mathbf{R}$	ماتریس کواریانس نویز اندازه‌گیری
$\mathbf{x}_0^m$	مقدار اولیه متغیرهای حالت ابتدایی مدل m-ام
$\mathbf{P}_0^m$	مقدار اولیه ماتریس کواریانس مدل m-ام
Pr_0^m	احتمال اولیه هر مدل باد
$\hat{\mathbf{x}}_k^m$	تخمین متغیرهای حالت مرتبط با m-امین مدل
$\mathbf{P}_k^m$	ماتریس کواریانس مرتبط با هر مدل
τ_k^m	تابع احتمال هر مدل

$\mathrm{n_m}$	تعداد سنسورهای خروجی
$\mathbf{r}_k^m$	باقیمانده فیلتر m-ام
$\mathbf{z}_k$	خروجی اندازه‌گیری‌شده
$\hat{\mathbf{z}}_k^m$	خروجی تخمین‌زده شده
$\mathbf{S}_k^m$	ماتریس کواریانس باقیمانده
$\mathbf{H}_k^m$	ماتریس خروجی m-امین مدل در گام زمانی k-ام
Pr_k^m	احتمال انطباق مدل باد m-ام در لحظه k
$\hat{w}_n$	بهترین تخمین مولفه باد طولی
$\hat{w}_e$	بهترین تخمین مولفه باد عرضی
$\hat{w}_d$	بهترین تخمین مولفه باد عمودی
N	تعداد مورچه‌ها
$\mathrm{N_t}$	تعداد بهترین مورچه‌های منتخب
$\mathbf{F}_{m,k-1}^{i,j}$	ماتریس انتقال متغیرهای حالت هر فیلترِ منطبق با مدل
$\mathbf{Q}_\mathrm{m}$	ماتریس کواریانس نویز فرآیند m-امین مدل
$\mathbf{K}_k^{i,j}$	بهره کالمن مرتبط با فیلتر m-ام
$\mathbf{R}_m$	ماتریس‌های کواریانس اندازه‌گیری هر مدل
$\mathbf{H}_{m,k}^{i,j}$	ماتریس مشاهدات مرتبط با فیلتر m-ام
$c_{m,k\|k}^{i,j}$	تابع هزینه مورچه j -ام در زمان k
$\hat{\mathbf{x}}_{k\|k}^{i,j_{\min}}$	بهترین نقطه یافت‌شده در حلقه داخلی i-ام توسط m-امین فیلترِ منطبق با هر مدل
$(\sigma_{m,k}^{i})_p^2$	واریانس تابع توزیع فرمون نرمال برای بعد p

$\left(\hat{x}^{i,j}_{m,k\|k}\right)_p$	مولفه $\hat{\mathbf{x}}^{i,j}_{m,k\|k}$ در بعد p
$\left(\hat{x}^{i,j_{\min}}_{m,k\|k}\right)_p$	مولفه $\hat{\mathbf{x}}^{i,j_{\min}}_{m,k\|k}$ در بعد p
$L_{m,k\|k}$	تابع احتمال منطبق با هر مدل
$\mathbf{r}_{m,k\|k}$	باقیمانده m-امین فیلتر
$\mathbf{S}_{m,k\|k}$	ماتریس کواریانس باقیمانده هر فیلتر
$\mathrm{Pr}_{m,0}$	مقدار اولیه احتمال
$\hat{\mathrm{m}}$	بهترین مدل
$\mathrm{T_P}$	طول افق پیش‌بینی
$\mathbf{u}_0^j$	موقعیت ابتدایی متغیر فرمان کنترلی ذره j-ام
$\mathbf{v}_0^j$	سرعت اولیه هر ذره
$\mathbf{z}^j_{k+k_p}$	خروجی‌های آینده ذره j-ام
$\mathbf{u}^{j,i}_{k+k_p}$	بردار فرامین کنترلی آینده ذره j-ام
$\boldsymbol{\gamma}^{j,i}_{k-1+k_p}$	بردار متغیر تصادفی
$c_k^{j,i}$	تابع هزینه ذره j-ام در k-امین گام زمانی
$c_{\mathrm{te}}^{j,i}$	هزینه ناشی از خطای ردگیری خروجی‌های پیش‌بینی شده ذره j-ام با مقدار مطلوب خروجی
$c_{\mathrm{ce}}^{j,i}$	هزینه ناشی از تلاش کنترلی در طول افق کنترلی
$c_{\mathrm{cs}}^{j,i}$	هزینه ناشی از اختلاف فرامین کنترلی در یک گام زمانی افق پیش‌بین با گام زمانی بعدی
$\mathbf{p}^{j,i}_{k+k_p}$	بهترین فرامین کنترلی برای ذره j-ام

$\mathbf{g}^{i}_{k+k_p}$	بهترین فرامین کنترلی در بین کل ذرات
$\mathbf{v}^{j,i}_{k+k_p}$	سرعت ذره j-ام در گام زمانی k-ام و در حلقه تکرار i-ام
w	ماتریس ثابت اصطکاک
c_1	ضریب ثابت مثبت
c_2	ضریب ثابت مثبت
r_1	عدد تصادفی با توزیع یکنواخت
r_2	عدد تصادفی با توزیع یکنواخت
$\mathbf{u}^{j,i}_{k+k_p}$	موقعیت فرامین کنترلی ذره j-ام
i_{max}	مقدار بیشینه تکرار

۱ مقدمه

پرنده‌های بدون سرنشین (UAV)[1] به‌صورت گسترده‌ای در کاربردهای نظامی و غیرنظامی هم‌چون شناسایی، دیده‌بانی، کنترل مرزها، جاسوسی، کنترل ترافیک و تشخیص آلودگی مواد شیمیایی استفاده شده‌اند. این وسایل اخیراً به‌علت مزایای آن‌ها در افزایش مانورپذیری، کاهش هزینه، کاهش سطح مقطع راداری، افزایش مداومت پروازی و کاهش خطر برای خدمه توجه زیادی را به خود جلب کرده‌اند. پرنده‌های بدون سرنشین عموماً به دو دسته، یکی با توانایی نشست و برخاست عمودی (VTOL)[2] و دیگری با توانایی نشست و برخاست با استفاده از یک باند پروازی یا پرنده‌های بال‌ثابت طبقه‌بندی می‌شوند. پرنده‌های بال‌ثابت قابلیت انجام بسیاری از ماموریت‌ها از جمله دیده‌بانی، مداخله در مناطق دشمن، بررسی آلودگی‌ها، نقشه‌برداری و غیره را دارند.

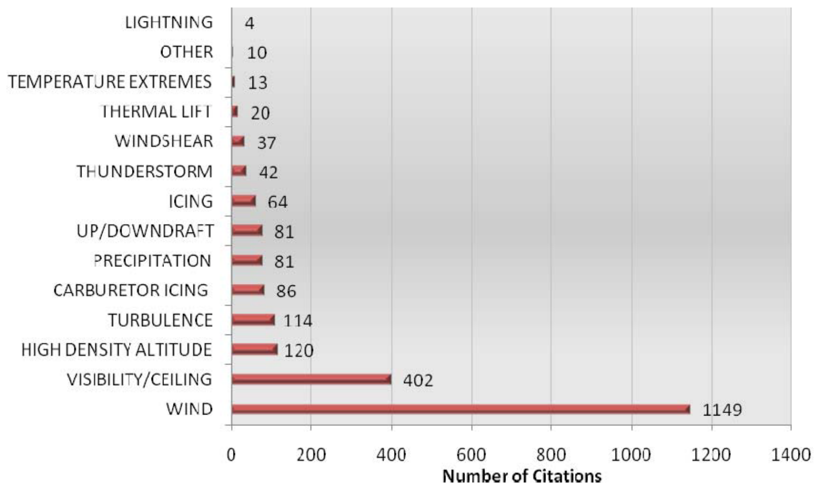
از جمله مهم‌ترین مسائلی که توجه طراحان پرنده‌های بال‌ثابت را به خود اختصاص داده‌است، مساله ایمنی پرواز است. لذا، به حداقل رساندن عوامل سوانح پروازی و حرکت به‌سمت سیستم‌های کنترل خودکار گامی موثر در افزایش ایمنی پرواز پرنده‌های بال‌ثابت محسوب می‌شود. شرایط نامناسب جوی هم‌چون رعد و برق[3]، یخزدن[4] بال پرنده، کاهش دید خلبان، وزش باد، توربولانس و باد برشی یکی از مهم‌ترین عواملی است که ایمنی پرواز پرنده‌های بال‌ثابت را به مخاطره می‌اندازد [۱]. به‌عنوان مثال، تعداد سوانح پروازی ناشی از عوامل پدیدآورنده شرایط نامناسب جوی، که در کشور هند در سال‌های ۲۰۰۳ تا ۲۰۰۷ رخ داده‌است، در شکل ۱.۱ نشان داده شده‌است.

[1] Unmanned Aerial Vehicle

[2] Vertical Takeoff and Landing

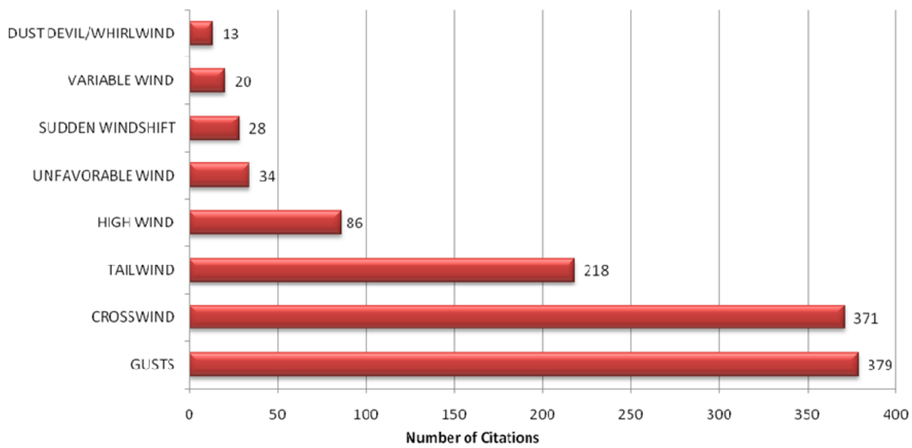
[3] Lightning

[4] Ice



شکل ۱.۱ تعداد سوانح ناشی از شرایط نامناسب جوی در سال‌های ۲۰۰۳ تا ۲۰۰۷ [۲].

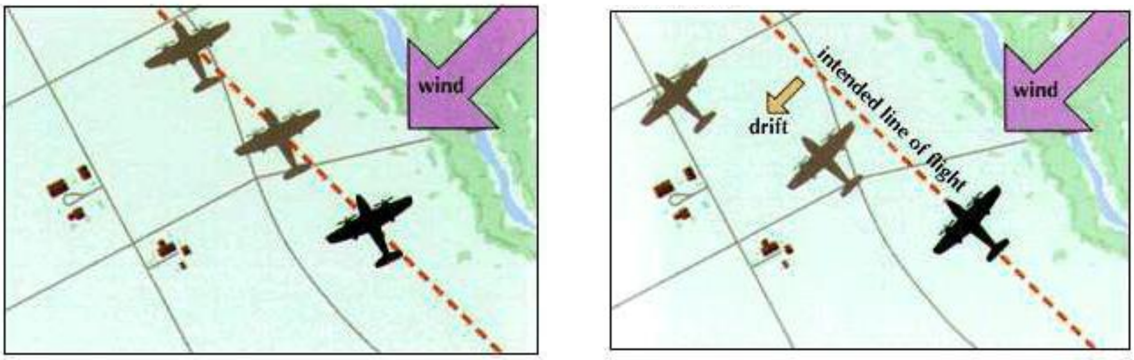
همانطور که در شکل ۱.۱ مشاهده می‌شود، اغتشاشات اتمسفری همچون باد، باد برشی و توربولانس از مهم‌ترین عوامل پدیدآورنده شرایط نامناسب جوی است که باعث ایجاد سوانح هوایی می‌شود. در این میان، وزش باد شامل بادهای جانبی، عرضی، روبه رو و پشت بیشترین تعداد سوانح هوایی را به خود اختصاص داده‌اند. به‌عنوان مثال، تعداد سوانح پروازی ناشی از انواع باد، که در کشور هند در سال‌های ۲۰۰۳ تا ۲۰۰۷ رخ داده‌است، در شکل ۲.۱ نشان داده شده‌است. همانگونه که مشاهده می‌شود، باد جانبی و باد از پشت بیشترین تاثیر را در به مخاطره انداختن ایمنی پرواز دارند.



شکل ۲.۱ تعداد سوانح ناشی از انواع باد در سال‌های ۲۰۰۳-۲۰۰۷ [۲].

از این رو، مطالعه تاثیر اغتشاشات اتمسفری بر روی عملکرد سازه و پرواز پرنده، بخش مهمی از تحقیقات در صنعت هوایی محسوب می‌شود. بارهای سازه‌ای ناشی از مواجه پرنده با اغتشاشات اتمسفری

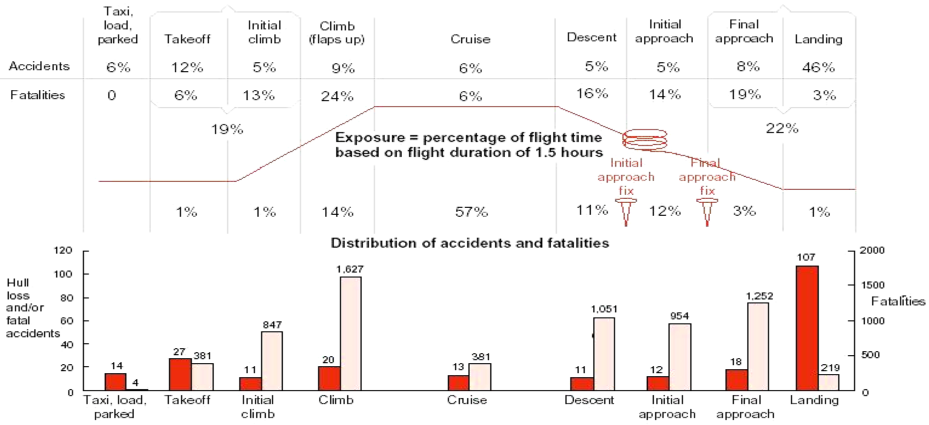
منجر به کاهش عمر سازه و در نتیجه آسیب‌رساندن به آن می‌شود. همچنین، ممکن است کنترل مسیر پرنده در اثر مواجه با اغتشاشات اتمسفری با مشکلاتی همراه شود. مواجه با اینگونه اغتشاشات باعث منحرف‌شدن پرنده از مسیر مطلوب پروازی، پرواز ناپایدار و گاهی سقوط پرنده می‌شود [۳]-[۴]. انحراف پرنده در اثر وزش باد و تصحیح وضعیت آن در شکل ۳.۱ نشان داده شده‌است.



(الف) (ب)

شکل ۳.۱ عکس‌العمل پرنده در مواجه با باد: الف) انحراف پرنده در اثر وزش باد، ب) تصحیح وضعیت.

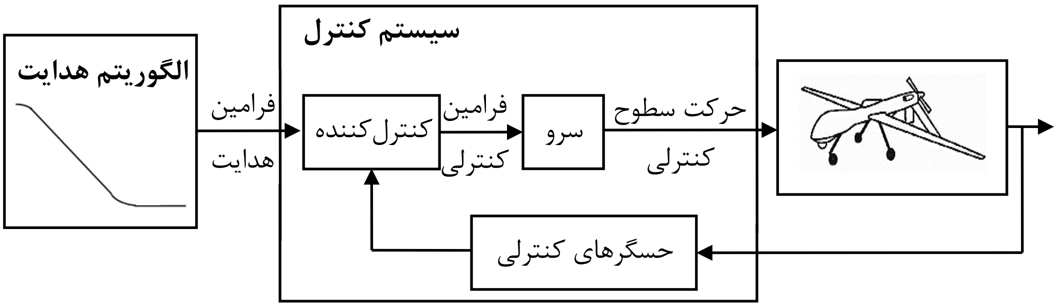
همچنین، درصد سوانح هوایی در مراحل مختلف پرواز در شکل ۴.۱ نشان داده شده‌است. همانطور که مشاهده می‌شود، ۱۷٪ و ۵۴٪ از سوانح هوایی به‌ترتیب در مراحل برخاست و فرود پرنده اتفاق افتاده است. درصد وقوع سوانح هوایی در فرآیند فرود پرنده نشان‌دهنده زیاد بودن حجم بار کاری و تنش‌های کاری در این مرحله است. از این‌رو، فرآیند فرود از مهم‌ترین مراحل پروازی محسوب می‌شوند. نمونه‌ای از سانحه هوایی در فرآیند فرود، که در کشور هند رخ داده‌است، در شکل ۵.۱ نشان داده شده‌است.



شکل ۴.۱ درصد سوانح هوایی در مراحل مختلف پروازی [۲].

شکل ۵.۱ نمونه‌ای از سانحه هوایی در فرآیند فرود.

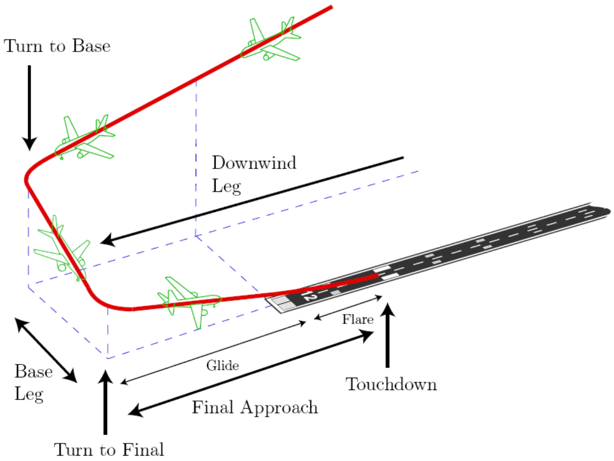
با تلفیق نتایج حاصل از شکل ۱.۱ و شکل ۴.۱ می‌توان به این نکته اشاره کرد که فرآیند فرود از بحرانی‌ترین مراحل پروازی محسوب می‌شود. همچنین، فرآیند فرود از منظر حجم کاری، درصد بالایی از کل عملیات پرواز را به خود اختصاص می‌دهد. بنابراین، به‌کارگیری سیستم‌های فرود خودکار شامل سیستم‌های هدایت، کنترل و ناوبری دقیق در مواجه با اغتشاشات اتمسفری در پرنده‌های بدون سرنشین، که می‌تواند باعث افزایش ایمنی پرواز شود، همواره مورد توجه بوده‌است. اجزای سیستم‌های هدایت، ناوبری و کنترل و ارتباطات بین آن‌ها در فرآیند فرود برای یک پرنده بدون سرنشین بال‌ثابت در شکل ۶.۱ نشان داده شده‌است.



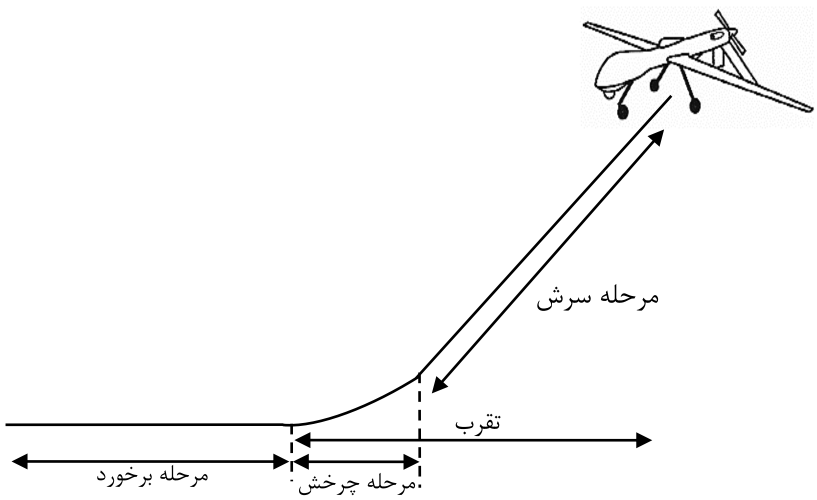
شکل ۶.۱ اجزای سیستم هدایت و کنترل و ارتباطات بین آن‌ها در فرآیند فرود.

هدایت پرنده بدون سرنشین در فرآیند فرود به‌معنای تولید فرامین لازم جهت کنترل مسیر آن است. در این‌صورت، باید ارتفاع، موقعیت، سرعت و وضعیت مطلوب، که پرنده باید به آن برسد، در هر لحظه توسط سیستم هدایت تعیین شود. الگوریتم فرود خودکار در شکل ۷.۱ نشان داده شده‌است. در این

صورت، پس از ورود پرنده به محدوده فرود، مراحل فرود شـامل تقـرب[۵]، سـرش[۶]، چـرخش[۷] و برخـورد[۸] به‌منظور تکمیل فرآیند فرود انجام می‌شود. این مراحل برای پرنده بدون سرنشین بال‌ثابت در شـکل ۸.۱ نشان داده شده‌است.



شکل ۷.۱ بخش‌های مختلف مسیر در فرآیند فرود [۵].



شکل ۸.۱ مراحل فرآیند فرود.

[5] Approach

[6] Glide

[7] Flare

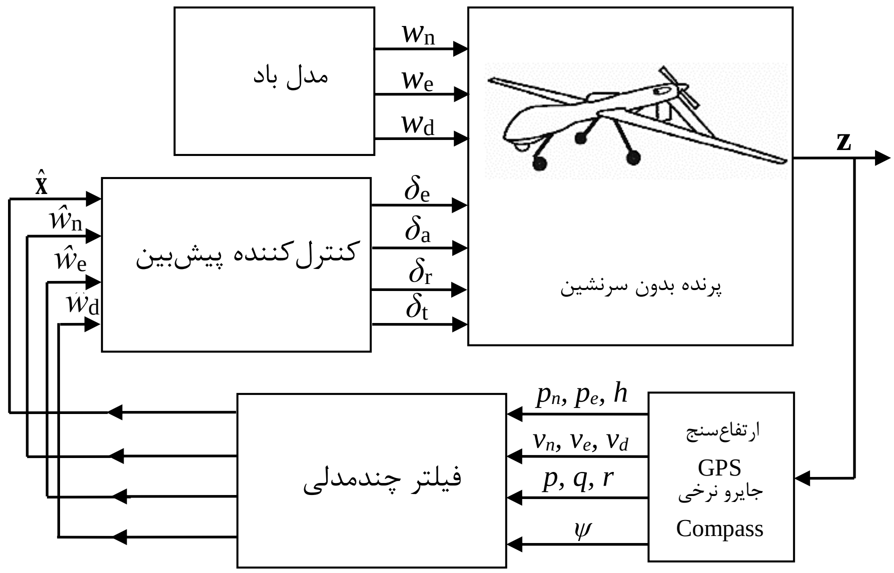
[8] Touchdown

اجرای فرامین تولیدشده توسط سیستم هدایت و نیز پایدارسازی پرنده از جمله وظایف سیستم کنترل فرآیند فرود خودکار محسوب می‌شود. سیستم کنترل مجموعه‌ای شامل حسگرهای کنترلی، کنترل‌کننده (یا منطق کنترلی) و سروومکانیزم است. حسگرهای کنترلی موقعیت، سرعت، وضعیت لحظه‌ای پرنده را نسبت به دستگاه مختصات اینرسی اندازه‌گیری می‌کنند. کنترل‌کننده باید پایداری وسیله در مقابل نامعینی‌های مدل، نویز اندازه‌گیری، اغتشاشات محیط مانند باد و پدیده آیرودینامیکی اثر زمین و همچنین، اجرای سریع فرامین هدایت را تضمین کند. خروجی کنترل‌کننده فرامین زاویه مطلوب سطوح کنترلی است که باید توسط سروومکانیزم اجرا شود. به‌عبارت دیگر، کنترل‌کننده فرامین هدایت را به فرامین کنترلی که توسط سروومکانیزم قابل اجرا باشد، تبدیل و سروومکانیزم آن را اجرا می‌کند.

به‌منظور تولید سیگنال‌های کنترلی دقیق پرنده در فرآیند فرود خودکار حتی‌الامکان باید مقدار تمام متغیرهای حالت و همین‌طور اطلاعات اغتشاشات ورودی در دسترس باشد. در عمل، بعضی از متغیرهای حالت و نیز اغتشاشات ورودی قابل اندازه‌گیری نیستند؛ لذا، در صورت وزش باد لازم است تا علاوه بر متغیرهای حالت غیرقابل اندازه‌گیری، سرعت و جهت باد نیز به‌منظور بهبود عملکرد پروازی پرنده تخمین‌زده شوند. در این‌صورت، پرنده می‌تواند اثر باد را جبران کرده و مسیر مطلوب پروازی را به‌صورت دقیق ردگیری کند.

هدف این رساله تخمین و جبران‌سازی برخط اغتشاشات اتمسفری به‌منظور فرود خودکار ایمن پرنده بدون سرنشین بال‌ثابت با استفاده از فیلترهای چندمدلی است. بلوک دیاگرام الگوریتم تخمین مدل باد و متغیرهای حالت پرنده در شکل ۹.۱ نشان داده شده‌است. به منظور مدل‌سازی دینامیکی، پرنده صلب فرض شده و مدل دینامیکی حسگرها ایده‌آل و خروجی آن‌ها همراه با نویز درنظر گرفته می‌شود. همچنین، انواع باد به‌منظور ارزیابی عملکرد فاز فرود مدل‌سازی می‌شود. به‌منظور مدل‌کردن باد از مدل‌های استاندارد موجود در مراجع شامل مدل‌های باد معین و تصادفی استفاده می‌شود. سپس، تحلیل مشاهده‌پذیری به منظور امکان‌سنجی تخمین متغیرهای حالت و مولفه‌های باد با استفاده از اندازه‌گیری انجام می‌شود. در مرحله بعد، فیلتر چندمدلی با استفاده از خروجی حسگرها، نوع باد و پارامترهای آن و نیز متغیرهای حالت پرنده را تخمین زده و به الگوریتم کنترل‌کننده مدل پیش‌بین ارسال می‌کند.

کنترل‌کننده با استفاده از اطلاعات حاصل از فیلتر چندمدلی و الگوریتم فرود، فرامین لازم جهت فرود خودکار را صادر می‌کند.



شکل ۹.۱ بلوک دیاگرام الگوریتم تخمین مدل باد به‌منظور استفاده در کنترل‌کننده مدل پیش‌بین.

در ادامه، ابتدا در فصل ۲ پیشینه‌ای از کارهای انجام‌شده در زمینه مدل‌سازی، تخمین و جبران‌سازی اغتشاشات اتمسفری، تحلیل مشاهده‌پذیری اغتشاشات ورودی و فیلترهای چندمدلی ارائه می‌شود. سپس، مدل‌سازی دینامیک پرنده و مدل‌سازی پدیده باد در فصل ۳ ارائه می‌شود. همچنین، مشاهده‌پذیری پدیده باد و متغیرهای حالت پرنده بدون سرنشین در فصل ۴ بررسی می‌شود. در گام بعد، در فصل ۵ فیلترهای چندمدلی معرفی و تخمین‌گر چندمدلی باد به‌منظور تخمین نوع مدل باد، پارامترهای آن و متغیرهای حالت پرنده طراحی می‌شود. همچنین، فیلترهای چندمدلی ابتکاری در فصل ۶ توسعه داده شده و یک کنترل‌کننده پیش‌بین غیرخطی در فصل ۷ طراحی و بکارگیری می‌شود. در فصل ۸ نیز نتایج پیاده‌سازی فیلتر چندمدلی و کنترل‌کننده پیش‌بین ارائه می‌شود. در نهایت، در فصل ۹ به جمع‌بندی، نتیجه‌گیری و ارائه پیشنهادات پرداخته می‌شود.

۲ پیشینه پژوهش و نوآوری‌های آن

تاکنون تحقیقات زیادی در زمینه فرود خودکار یک پرنده بدون سرنشین بال‌ثابت در حضور باد انجام شده‌است. تخمین بخش مهمی از این مساله است. در این فصل نقش‌آفرینی‌هایی که دیگران در این مسئله داشته‌اند، با نگاهی تکاملی و انتقادی بیان می‌شود. برای نیل به این هدف، در ابتدا پژوهش‌های صورت‌گرفته در زمینه مدلسازی و اثر اغتشاشات اتمسفری در فرآیند فرود در بخش ۱.۲ مرور می‌شوند. سپس، پیشینه تحقیقات انجام‌شده در زمینه مشاهده‌پذیری در حضور ورودی‌های نامعلوم در بخش ۲.۲ بررسی می‌شوند. در مرحله بعد، نوشته‌های علمی در زمینه فیلترهای چندمدلی در بخش ۳.۲ معرفی می‌شود. در نهایت، رویکرد مورد نظر در این رساله با توجه به نتایج پژوهش‌های صورت‌گرفته در بخش ۴.۲ بررسی می‌شود.

۱.۲ اغتشاشات اتمسفری

اغتشاشات اتمسفری در پرنده‌های بدون سرنشین بال‌ثابت سبب تغییر مکان و سرعت پرنده می‌شوند. در فازهای پروازی مثل کروز، سرعت و ارتفاع پرنده در حدی است که می‌تواند مسیر و عملکرد پروازی خود را بدون انحراف از مسیر اصلی حفظ کند. اما، در صورتیکه پرنده در حین برخاست یا فرود با اغتشاشات اتمسفری مواجه شود، به‌دلیل نزدیک‌بودن به زمین می‌تواند منجر به سانحه شود. پس، در هنگام فرود، توجه ویژه به ماهیت اغتشاشات اتمسفری در نزدیک زمین بسیار حائز اهمیت است. پژوهش‌های انجام‌شده در زمینه اثر اغتشاشات اتمسفری در فرآیند فرود را می‌توان به حوزه‌های زیر طبقه‌بندی کرد:

- مدل‌سازی اغتشاشات اتمسفری (بخش ۱.۱.۲)
- تخمین اغتشاشات اتمسفری (بخش ۲.۱.۲)
- اثرات آیرودینامیکی اغتشاشات اتمسفری (بخش ۳.۱.۲)
- اصلاح مسیر پروازی در حضور اغتشاشات اتمسفری (بخش ۴.۱.۲)
- جبران‌سازی اغتشاشات اتمسفری در کنترل‌کننده (بخش ۵.۱.۲)

در ادامه هر یک از این حوزه‌ها توضیح داده می‌شوند.

۱.۱.۲ مدل‌سازی اغتشاشات اتمسفری

درک صحیحی از ماهیت اغتشاشات اتمسفری و ایجاد یک مدل پیش‌گویانه باعث بهبود کیفیت پرواز و کاهش سوانح خواهد شد. همچنین، مدل‌سازی اغتشاشات اتمسفری نقش مهمی در طراحی پرنده و تحلیل رفتار دینامیکی آن ایفا می‌کند. از این‌رو، در چند دهه اخیر تلاش‌های گسترده‌ای به‌منظور مدل‌سازی اغتشاشات اتمسفری انجام شده‌است. اغتشاشات اتمسفری می‌تواند به‌صورت تابعی از زمان و موقعیت در سه جهت مدل شود. از دیگر دلایل اهمیت مدل‌سازی اغتشاشات اتمسفری می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- بررسی تاثیر اغتشاشات اتمسفری بر مسیر پرواز پرنده
- بررسی عملکرد کنترل‌کننده در حضور اغتشاشات
- بررسی پاسخ پرنده به اغتشاشات در حین پرواز

مدل اغتشاشات اتمسفری را می‌توان به دو دسته اغتشاشات معین[۱] و اغتشاشات تصادفی[۲] تقسیم کرد [۵]. از جمله مدلهای اغتشاشات اتمسفری معین می‌توان به مدل باد روبه‌رو[۳]، باد هم‌سو یا باد از پشت[۴]، باد جانبی[۵]، باد "cosine–۱"، باد برشی[۶] و دانبرست[۷] اشاره کرد. اغتشاشات اتمسفری معین را می‌توان از لحاظ استراتژی طیفی به دو دسته بادهای ثابت و برشی طبقه‌بندی کرد. این مدل‌ها از نظر مقیاس و فرکانس تحریک با یکدیگر متفاوت هستند. اگر باد ثابت یا فرکانس آن کمتر از فرکانس مود فوگوئید باشد، سیستم کنترل پرنده توانایی غلبه بر این نوع از اغتشاشات اتمسفری را دارد. از جمله مدلهای باد ثابت می‌توان به باد روبه‌رو، باد هم‌سو یا باد از پشت و باد جانبی اشاره کرد.

---

[1] Determinstic Turbulance

[2] Stochastic Turbulance

[3] Head Wind

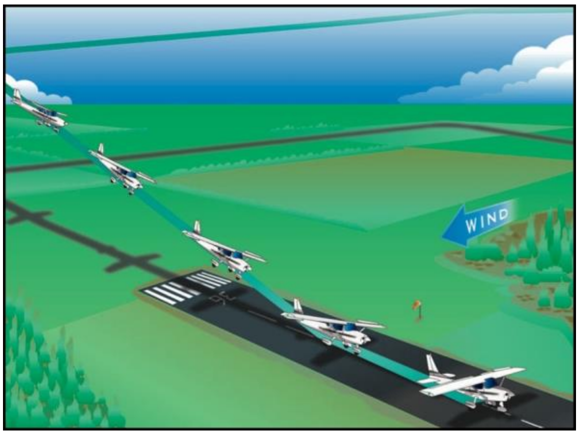
[4] Tail Wind

[5] Cross Wind

[6] Wind Shear

[7] DownBurst

باد روبه‌رو، بادی است که در خلاف جهت پرواز می‌وزد. از این‌رو، به‌دلیل کاهش سرعت زمینی پرنده در هنگام نشست و برخاست بسیار مفید است و در حین پرواز باعث افزایش مصرف سوخت می‌شود. باد هم‌سو یا پشت، بادی است که هم‌سو با جهت پرواز می‌وزد. از آنجا که این باد باعث افزایش طول باند می‌شود، لذا برای نشست و برخاست مضر است. اما در طول پرواز مفید بوده و باعث زودتر رسیدن به مقصد و کاهش مصرف سوخت می‌شود. باد جانبی بادی است که همیشه به سمت راست یا چپ پرنده می‌وزد. وزش این باد باعث خروج پرنده از مسیر مطلوب می‌شود؛ لذا، در فرآیندهای نشست و برخاست و نیز در حین پرواز مضر است. وزش باد جانبی در حین فرآیند فرود در شکل ۱.۲ نشان داده شده‌است.



شکل ۱.۲ وزش باد جانبی در حین فرآیند فرود.

باد برشی[۸] یک پدیده مهم اتمسفری است که باعث ایجاد تغییر مقدار و جهت میانگین سرعت باد در طی یک بازه مکانی می‌شود. این بادها می‌توانند باعث انحراف بیشتر پرنده از مسیر اصلی پروازی شوند. طیف فرکانسی بادهای برشی بین محدوده فرکانس مودهای فوگوئید تا پریود کوتاه قرار دارد. از آنجا که، مود فوگوئید باعث تغییر ارتفاع پرنده می‌شود؛ لذا وزش باد برشی در فازهای برخاست و فرود، احتمال برخورد پرنده را با زمین بیشتر می‌کند. پروفیل سرعت باد برشی به‌صورت تابعی از ارتفاع و سرعت باد اندازه‌گیری‌شده در ارتفاع ۶ متری سطح زمین مدل می‌شود [۵].

پدیده دانبرست یکی از خطرناک‌ترین بادهای برشی با دنباله بزرگ و مدت زمان کوتاه است. این پدیده به توده‌ای از هوا اطلاق می‌شود که با سرعت قابل توجهی از ارتفاعات بالا به‌طرف زمین حرکت

[۸] انواع متعددی بادهای برشی نظیر جبهه‌های تند باد، جبهه‌های هوای گرم و سرد، امواج حاصل از کوهستان‌ها، نسیم‌های دریایی و طوفان‌های تندری وجود دارند.

می‌کند. این جریان قوی موضعی پس از برخورد با زمین مولفه‌های شعاعی واگرا از هم تولید می‌کند. پدیده دانبرست در شکل ۲.۲ نشان داده شده‌است.

شکل ۲.۲ پدیده دانبرست.

اندازه دانبرست‌ها از کمتر از یک کیلومتر تا ده کیلومتر متغیر است. دانبرست‌ها بر اساس مقیاس خروجی، به دو دسته مایکروبرست[9] و ماکروبرست[10] طبقه‌بندی می‌شود [۷]. مایکروبرست‌ها مطابق با شکل ۳.۲ در قطری کمتر از ۴ کیلومتر پراکنده می‌شوند و نیز دارای سرعت بیش از ۱۰ متر بر ثانیه هستند. اما در مقابل ماکروبرست‌ها مطابق با شکل ۴.۲ در قطری بیش از ۱۰ کیلومتر و با سرعت کمتر از ۱۰ متر بر ثانیه پخش می‌شوند. از آنجا که مقیاس مکانی کوچک مایکروبرست سبب ایجاد بادهای برشی با تغییرات سریع سرعت می‌شوند؛ لذا احتمال مواجه پرنده در ارتفاعات اندک با مایکروبرست وجود دارد.

روش‌های استخراج مدل‌های پدیده مایکروبرست را می‌توان به سه دسته مدل‌های باد مبتنی بر حل عددی معادلات مکانیک سیالات و شرایط مرزی، تقریب‌های تحلیلی مبنی بر رفتار پرنده در سوانح هوایی و ترکیب حل عددی معادلات مکانیک سیالات و تقریب‌های تحلیلی طبقه‌بندی کرد. در دسته اول، مدل‌های اغتشاشات اتمسفری مبتنی بر حل عددی معادلات مکانیک سیالات و شرایط مرزی استخراج می‌شوند. به‌عنوان نمونه می‌توان به مدل‌های Chay [۱۰] و Letchford [۱۱] اشاره کرد. در دسته دوم، به‌منظور مدل‌سازی اغتشاشات اتمسفری از تقریب‌های تحلیلی مبتنی بر رفتار پرنده در سوانح هوایی استفاده می‌شود. به‌عنوان نمونه می‌توان به مدل‌های Ivan [۱۲] و Zhu-Etkin [۱۳] اشاره کرد.

---

[9] Microburst

[10] Macroburst

در دسته سوم، مدل باد با ترکیب حل عددی معادلات مکانیک سیالات و تقریب‌های تحلیلی استخراج می‌شود. به‌عنوان نمونه می‌توان به مدل‌های Vicory [۱۴] و Oseguera-Bowles [۱۵] اشاره کرد.

شکل ۳.۲ پدیده ماکروبرست [۸].

شکل ۴.۲ پدیده مایکروبرست [۸].

تدوذور فوجیتا نخستین کسی بود که در اواخر دهه ۱۹۷۰ مایکروبرست را به‌عنوان خطری برای جامعه هوانوردی معرفی کرد [۷]. انواع مدل‌های در دسترس به‌منظور مدل‌سازی پدیده مایکروبرست به‌صورت مدل سینوس-کسینوس [۱۶]، Turova [۱۷]، Zhu-Etkin، Dogan [۱۸]، Chao-Chen [۱۹]، Oseguera-Bowles، Vicory و Holmes-Oliver [۲۰] هستند. مدل Ivan یک مدل ناشی از گردابه حلقوی به‌منظور شبیه‌سازی دان‌برست است. مزیت این مدل این است که با اصل برهم نهی تطابق دارد و از یک مدل گردابه حلقوی چند مدلی به‌منظور توصیف بهتر جریان استفاده می‌کند. در مقابل، Oseguera یک مدل دو حلقوی گردابه‌ای برای دانبرست است.

اغتشاشات اتمسفری تصادفی شامل نوسانات نامنظم و کوچک در میانگین سرعت باد هستند که به‌علت اصطکاک با سطح زمین و/یا بین لایه‌های اتمسفری رخ می‌دهند. این اغتشاشات را توربولانس نیز

می‌نامند [۵]. توربولانس برخلاف اغتشاشات معین، در مدت زمان کمتری رخ می‌دهند. رفتار توربولانس تنها با طیف چگالی طیف توان باد، که بیانگر شدت توربولانس است، بیان می‌شود. محدوده فرکانسی توربولانس بیش‌تر از فرکانس مود پریود کوتاه پرنده است؛ لذا سبب خستگی سازه و افزایش بار کاری خلبان می‌شود. از این‌رو، مدل‌سازی توربولانس نقش مهمی را به‌منظور بررسی عملکرد سازه و حلقه‌های کنترل و هدایت ایفا می‌کند.

از جمله مدل‌های اغتشاشات اتمسفری تصادفی، که در ارتفاعات رخ می‌دهد، می‌توان به مدل‌های درایدن[۱۱] و ون‌کارمن[۱۲] اشاره کرد [۵]-[۶]. از مدل ون‌کارمن به‌منظور شبیه‌سازی پرواز در ارتفاعات بالا و سرعت‌های زیاد استفاده می‌شود. همچنین، مدل درایدن کاربرد زیادی به‌منظور شبیه‌سازی پرواز در ارتفاعات کم به‌صورت ویژه در فرآیند فرود دارد. از آنجا که مدل اصلی درایدن دارای توان‌های کسری است، لذا از تقریب‌های آن استفاده می‌شود.

۲.۱.۲ تخمین اغتشاشات اتمسفری

پژوهش‌های انجام‌شده در زمینه تخمین اغتشاشات اتمسفری به شناسایی مولفه‌های سرعت باد می‌پردازد. این پژوهش‌ها به دو روش مثلث باد[۱۳] [۲۱] و تخمین باد مبتنی بر مدل دینامیکی پرنده [۲۲] طبقه‌بندی می‌شود. در ادامه، این دو روش به‌ترتیب در بخش‌های ۱.۲.۱.۲ و ۲.۲.۱.۲ تشریح می‌شوند.

۱.۲.۱.۲ روش مثلث باد

روش مثلث باد یک روش گرافیکی بر مبنای ارتباط هندسی بین حرکت پرنده و باد مطابق با شکل ۵.۲ است. در این‌صورت، سرعت و جهت بردار باد ($\mathbf{v}_w$)، که ناشی از اختلاف برداری بین سرعت پرنده نسبت

[11] Dryden Model

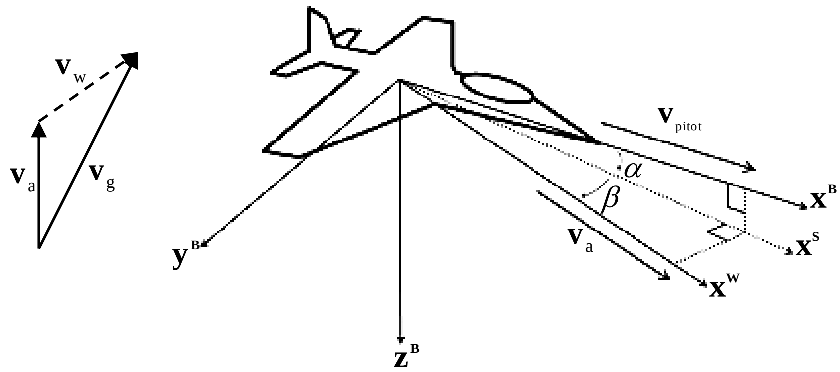
[12] VonKarman

[13] Wind Tringle Method

به زمین ($\mathbf{v}_g$)[۱۴] و سرعت حقیقی پرنده نسبت به هوا ($\mathbf{v}_a$)[۱۵] است، در سیستم مختصات NED[۱۶] (جهت‌های شمال جغرافیایی، شرق و پایین) حاصل می‌شود:

$$\mathbf{v}_w^{\mathbf{N}} = \mathbf{v}_g^{\mathbf{N}} - \mathbf{C}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{N}} \mathbf{v}_a^{\mathbf{B}} \quad (۱.۲)$$

در رابطه فوق، $\mathbf{v}_g$ و $\mathbf{v}_a$ به‌ترتیب بیانگر سرعت پرنده نسبت به زمین و سرعت حقیقی پرنده نسبت به هوا هستند. همچنین، $\mathbf{C}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{N}}$ نشان‌دهنده ماتریس انتقال از دستگاه مختصات بدنی به دستگاه مختصات NED است.



شکل ۵.۲ تخمین سرعت و جهت باد در روش مثلث باد.

روش مثلث باد به مدل دینامیکی پرنده وابسته نبوده و تنها نیاز به محاسبه سرعت حقیقی پرنده، سرعت زمینی پرنده و ماتریس انتقال دارد. به‌منظور محاسبه سرعت حقیقی پرنده در دستگاه مختصات بدنی نیاز به اندازه‌گیری زاویه حمله، زاویه لغزش جانبی و نیز فشار دینامیکی با استفاده از حسگر لوله پیتوت است. حسگر لوله پیتوت به دلیل موازی‌نبودن سر پراب با جریان هوا همراه با خطا است. همچنین، از آنجا که بردار سرعت حقیقی پرنده در مختصات بدنی محاسبه می‌شود، لذا نیاز به محاسبه

[14] Ground Velocity

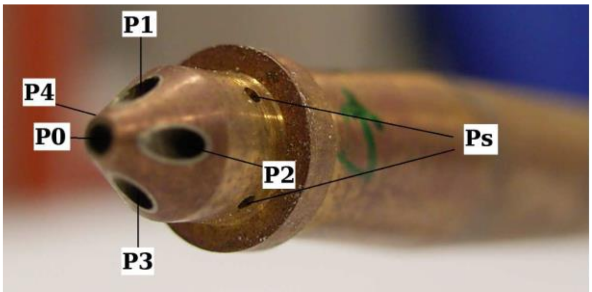
[15] Air Velocity

[16] North- East- Down

ماتریس کسینوس‌های هادی (DCM) به‌منظور انتقال بردار سرعت حقیقی پرنده از دستگاه مختصات بدنی به دستگاه مختصات NED است.

ماتریس کسینوس‌های هادی با اندازه‌گیری زوایای اویلر توسط سیستم تعیین وضعیت و سمت (AHRS)[۱۷] محاسبه می‌شود. به علاوه، سرعت زمینی پرنده در دستگاه مختصات NED از حسگر سامانه موقعیت‌یاب جهانی (GPS)[۱۸] محاسبه می‌شود. خروجی حسگر سامانه موقعیت‌یاب جهانی اغلب همراه با خطا و نویز است. بنابراین، از جمله مشکلات روش مثلث باد به‌منظور محاسبه سرعت و جهت باد می‌توان به ضرورت اندازه‌گیری زوایای حمله و لغزش، نیاز به اندازه‌گیری زوایای اویلر، خطا در خروجی حسگر GPS، خطای نصب لوله پیتوت و نویزی‌بودن خروجی‌های سنسور اشاره کرد. این مشکلات باعث عدم دقت در محاسبه سرعت و جهت باد می‌شود. از این‌رو، پژوهش‌های مختلفی به‌منظور رفع این مشکلات انجام شده‌است.

نیاز به اندازه‌گیری زوایای حمله و لغزش: هواپیماهای بزرگ مجهز به تیغه‌ها یا پراپ‌های چند کاناله[۱۹] هستند، که قادر به اندازه‌گیری زوایای حمله و لغزش هستند. اما در پرنده‌های بدون سرنشین استفاده از این حسگر به‌دلیل وزن بالا، اندازه بالا، هزینه و توان مصرفی مقرون به‌صرفه نیست. نمونه‌ای از این حسگرها در شکل ۶.۲ نشان داده شده‌است. در مرجع [۲۵] از این حسگر به‌منظور محاسبه زوایای حمله و لغزش و سپس محاسبه سرعت باد برای پرنده‌های بدون سرنشین استفاده شده‌است.



شکل ۶.۲ حسگر چند کاناله به‌منظور اندازه‌گیری زوایای حمله و لغزش.

[17] Attitude and Heading Reference System

[18] Global Positioning System

[19] Multi-Port Air Data

به‌منظور رفع این مشکل، در مرجع [۲۶] سرعت و جهت باد مستقل از زوایای حمله و لغزش با استفاده از فیلتر کالمن تخمین زده شده‌است. به‌این‌منظور، ابتدا خروجی سنسور سرعت هوا با درنظرگرفتن پارامتر k به‌منظور تصحیح خطای سنسور از رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\mathbf{v}_{\mathrm{a}} = \mathrm{k}\,\tilde{\mathbf{v}}_{\mathrm{a}} \tag{۲.۲}$$

در رابطه فوق، $\tilde{\mathbf{v}}_{\mathrm{a}}$ بیانگر خروجی اندازه‌گیری‌شده سرعت هوا توسط سنسور است. سپس با درنظرگرفتن سرعت باد و ضریب تصحیح سنسور به‌عنوان متغیرهای حالت ($\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{\mathrm{w}} \\ \mathrm{k} \end{bmatrix}$) و سرعت حاصله از سامانه موقعیت‌یاب جهانی به‌عنوان خروجی ($\mathbf{z} = v_{\mathrm{g}}$) و همچنین، فرض ثابت‌بودن سرعت وزش باد و ضریب تصحیح سنسور، معادلات در فضای حالت به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = 0 \\ \mathbf{z} = \mathbf{v}_{\mathrm{g}} = \mathbf{v}_{\mathrm{w}} + \mathrm{k}\ \mathbf{C}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{N}}\ \tilde{\mathbf{v}}_{\mathrm{a}} = x_1 + \mathbf{C}_{\mathbf{N}}^{\mathbf{B}}\ \tilde{\mathbf{v}}_{\mathrm{a}}\ x_2 \end{cases} \tag{۳.۲}$$

بنابراین، از رابطه فوق، ماتریس‌های فضای حالت به‌صورت $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{0}$ و $\mathbf{C} = [\mathrm{I}_{3\times3} \quad \mathbf{C}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{N}}\ \tilde{\mathbf{v}}_{\mathrm{a}}]$ بدست می‌آیند. لازم به‌ذکر است که ماتریس تبدیل سیستم مختصات جغرافیایی به بدنی($\mathbf{C}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{N}}$) توسط سیستم تعیین وضعیت و سمت اندازه‌گیری می‌شود. در نهایت، فیلتر کالمن قادر است تا متغیرهای حالت (سرعت باد ثابت و نیز فاکتور تصحیح سنسور سرعت هوا) را تخمین بزند. سپس با توجه به معادله (۱.۲)، مولفه‌های سرعت حقیقی پرنده نسبت به جریان هوا ($\mathbf{v}_{\mathrm{a}}^{\mathbf{B}} = [u_{\mathrm{rel}} \quad v_{\mathrm{rel}} \quad w_{\mathrm{rel}}]^{\mathrm{T}}$) از رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\mathbf{v}_{\mathrm{a}}^{\mathbf{B}} = \mathbf{v}_{\mathrm{w}}^{\mathbf{B}} - \mathbf{C}_{\mathbf{N}}^{\mathbf{B}} \mathbf{v}_{\mathrm{g}}^{\mathbf{N}} \tag{۴.۲}$$

در این‌صورت می‌توان زوایای حمله و لغزش جانبی را با توجه به شکل ۵.۲ از روابط زیر استخراج کرد:

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{w_{\mathrm{rel}}}{u_{\mathrm{rel}}}\right) \tag{۵.۲}$$

$$\beta = \sin^{-1}\left(\frac{v_{\mathrm{rel}}}{\mathbf{v}_{\mathrm{a}}}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{v_{\mathrm{rel}}}{\sqrt{u_{\mathrm{rel}}^{2} + v_{\mathrm{rel}}^{2} + w_{\mathrm{rel}}^{2}}}\right) \quad (۶.۲)$$

از مشکلات این روش می‌توان به ثابت درنظرگرفتن سرعت باد و ضریب تصحیح سنسور سرعت هوا اشاره کرد.

نیاز به اندازه‌گیری زوایای اویلر: به‌منظور محاسبه ماتریس تبدیل دستگاه مختصات بدنی به ناوبری به زوایای اویلر (رول، پیچ و یاو) نیاز است. از سنسور تعیین وضعیت و سمت به‌منظور تعیین زوایای اویلر استفاده می‌شود. این سنسور قادر به فراهم‌کردن اطلاعات زوایای رول، پیچ و یاو پرنده به‌منظور پیش‌بینی سرعت و جهت باد است. سنسور تعیین وضعیت و سمت از چندین حسگر نظیر حسگر میدان مغناطیسی، شتاب‌سنج خطی، ژیروسکوپ نرخی سه‌درجه‌آزادی و یک مدار الکترونیکی به‌منظور پردازش خروجی این حسگرها با استفاده از فیلتر کالمن تشکیل شده‌است. شتاب‌سنج‌ها و ژیروسکوپ‌های استفاده‌شده در سنسور AHRS برای محاسبه دقیق زوایای رول و پیچ کافی هستند؛ اما از حسگر میدان‌مغناطیسی زمین بهبود تخمین زاویه یاو استفاده می‌شود.

خطا در خروجی حسگر GPS: از جمله معایب استفاده از سامانه GPS در روش مثلث باد می‌توان به دقت اندازه‌گیری سرعت زمینی پرنده در حدود ۰/۱ متر بر ثانیه اشاره کرد. از این‌رو، استفاده از این سامانه به‌منظور پیش‌بینی سرعت و جهت باد با خطایی همراه است. به‌منظور افزایش دقت اندازه‌گیری سرعت زمینی در سامانه تعیین موقعیت جهانی از تکنیک سامانه GPS تفاضلی (DGPS)[۲۰] استفاده می‌شود. سامانه DGPS خطاهای تاخیر زمانی را محاسبه کرده و اطلاعات مربوط به تصحیح خطاها را به گیرنده متحرک ارسال می‌کند. از مشکلات سامانه تعیین موقعیت جهانی تفاضلی می‌توان به نویزی‌بودن سرعت زمینی پرنده اشاره کرد.

خطای نصب حسگر لوله پیتوت: لوله پیتوت از یک تیوب پرشده از یک سیال که سر آن[۲۱] در معرض جریان هوا است، مطابق با شکل ۷.۲ تشکیل شده‌است. سیال تیوب در حالت جریان هوای صفر دارای

[20] Diffrential Global Positioning System

[21] Stagnation Point

فشار برابر با فشار محیط، که فشار استاتیکی نامیده می‌شود، است. با حرکت پرنده و ایجاد جریان هوا متناسب با سرعت آن، یک فشار دینامیکی به سر لوله پیتوت اعمال می‌شود که برابر با اختلاف فشار کل با فشار استاتیکی است. در نتیجه، سرعت جریان هوا حاصله از لوله پیتوت با فرضیات کامل‌بودن گاز، حالت دائم دما، صفر بودن ویسکوزیته هوا و جریان آرام در امتداد خط جریان بر حسب اختلاف فشار استاتیکی و فشار کل، به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\mathbf{v}_{\mathrm{pitot}}^{2} = \frac{2(P_t - P_s)}{\rho} \qquad (۷.۲)$$

شکل ۷.۲ نمایی از لوله پیتوت [۲۳].

از جمله عوامل موثر بر عملکرد و دقت لوله پیتوت می‌توان به هندسه لوله پیتوت، هم راستابودن کامل سر تیوب با سرعت جریان هوا، اثرات ویسکوزیته سیال و عمودبودن جهت گرادیان جریان سیال بر لوله پیتوت (که باعث ثبت اشتباه فشار استاتیکی می‌شود) اشاره کرد. با توجه به نقش مهم این حسگر در پرنده، اختلال در عملکرد آن باعث پیش‌بینی نادرست جهت و سرعت باد می‌شود. به‌منظور رفع این مشکل، در مرجع [۲۴] علاوه بر سرعت و جهت باد، ضریب تصحیح این حسگر نیز با استفاده از روش فیلتر کالمن توسعه‌یافته تخمین زده شده‌است. به‌این‌منظور، ابتدا سرعت حقیقی پرنده با توجه به معادله (۱.۲) و شکل ۸.۲ و درنظرگرفتن دو جهت شرق و شمال به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\mathbf{v}_{\mathrm{a}}^{2} = \mathbf{v}_{\mathrm{g}}^{2} + \mathbf{v}_{\mathrm{w}}^{2} - 2\,\mathbf{v}_{\mathrm{g}}\mathbf{v}_{\mathrm{w}}\cos(\phi_{\mathrm{g}} - \phi_{\mathrm{w}}) \qquad (۸.۲)$$

همچنین، سرعت حاصل از لوله پیتوت با درنظرگرفتن پارامتر k به‌منظور تصحیح جبران فرضیات بیان‌شده در معادله (۷.۲) و خطای نصب حسگر لوله پیتوت از رابطه زیر حاصل می‌شود:

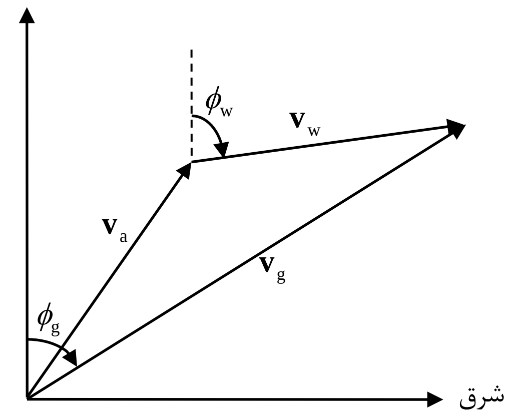
$$\mathbf{V}_{\mathrm{pitot}}^{2} = k\frac{2\Delta P}{\rho} \qquad (۹.۲)$$

سپس سرعت حقیقی پرنده نسبت به هوا به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{v}_a^2 = \frac{\Delta \mathrm{P}}{\rho \cos\alpha \cos\beta / 2\mathrm{k}} \qquad (۱۰.۲)$$

سرعت حقیقی پرنده نسبت به هوا با تعریف $\mathrm{sf} = \frac{\rho \cos\alpha \cos\beta}{2\mathrm{k}}$ به‌عنوان ضریب تصحیح حسگر لوله پیتوت به‌صورت $\mathbf{v}_a^2 = \frac{\Delta \mathrm{P}}{\mathrm{sf}}$ حاصل می‌شود. بنابراین، تغییرات فشار را می‌توان با جایگذاری $\mathbf{v}_a^2 = \frac{\Delta \mathrm{P}}{\mathrm{sf}}$ در رابطه (۸.۲) به‌صورت زیر بیان کرد:

$$\Delta \mathrm{P} = \mathrm{sf}\,[\mathbf{v}_\mathrm{g}^2 + \mathbf{v}_\mathrm{w}^2 - 2\mathbf{v}_\mathrm{g}\mathbf{v}_\mathrm{w}\cos(\phi_\mathrm{g} - \phi_\mathrm{w})] \qquad (۱۱.۲)$$



شکل ۸.۲ روش مثلث باد.

در این‌صورت، با درنظرگرفتن مولفه‌های سرعت باد، جهت باد و ضریب تصحیح به‌عنوان متغیرهای حالت ($\mathbf{x} = [\mathbf{v}_\mathrm{w} \quad \phi_\mathrm{w} \quad \mathrm{sf}]^\mathrm{T}$) و اختلاف فشار دینامیکی حاصل از لوله پیتوت به‌عنوان خروجی ($\mathbf{y} = \Delta P$) و همچنین، فرض وزش باد ثابت، معادلات در فضای حالت به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = 0 \\ \mathbf{y} = x_3\,[\mathbf{v}_\mathrm{g}^2 + x_1^2 - 2\mathbf{v}_\mathrm{g} x_1 \cos(\phi_\mathrm{g} - x_2)] \end{cases} \qquad (۱۲.۲)$$

لازم به‌ذکر است که سرعت زمینی پرنده ($\mathbf{v}_\mathrm{g}$) و زاویه سمت (ϕ_g) توسط GPS اندازه‌گیری می‌شود. در نهایت، فیلتر کالمن توسعه‌یافته قادر است تا متغیرهای حالت (مولفه‌های سرعت و جهت باد ثابت و نیز

فاکتور تصحیح لوله پیتوت) را تخمین بزند. از محدودیت‌های این روش می‌توان به درنظرگرفتن باد ثابت، ثابت درنظرگرفتن زوایای حمله و لغزش جانبی و فرض باد افقی اشاره کرد.

نویزی‌بودن خروجی سنسورها: از جمله معایب روش مثلث باد می‌توان به نویز همراه با خروجی سنسورهای سامانه تعیین موقعیت جهانی، لوله پیتوت و سیستم تعیین وضعیت و سمت اشاره کرد. از این‌رو، محاسبه سرعت و جهت باد با خطا همراه است. به‌منظور رفع این مشکل، در مراجع [۲۴] و [۲۷] تخمین مولفه‌های باد با استفاده از روش فیلتر کالمن انجام شده‌است. به‌این منظور، در مرجع [۲۷] با درنظرگرفتن عبارات $\mathbf{v}_w=[u_w \quad v_w \quad w_w]^T$ و $\mathbf{v}_g=[\dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{z}]^T$ و نیز جایگذاری در معادله (۱.۲) عبارت زیر حاصل می‌شود:

$$\mathbf{v}_g=\mathbf{v}_a+\mathbf{v}_w \rightarrow \begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{bmatrix}=\mathrm{v}\begin{bmatrix}\cos\gamma\cos\chi\\ \cos\gamma\sin\chi\\ \sin\gamma\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}w_n\\ w_e\\ w_d\end{bmatrix} \quad (۱۳.۲)$$

خروجی‌های سرعت و زاویه سمت حاصل از GPS را می‌توان برحسب مولفه‌های سرعت باد زمینی به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases}\mathrm{v}_{GPS}=\sqrt{\dot{X}^2+\dot{Y}^2+\dot{Z}^2}\\ \psi_{GPS}=\tan^{-1}\left(\dfrac{\dot{Y}}{\dot{X}}\right)\end{cases} \quad (۱۴.۲)$$

همچنین، از آنجا که زاویه مسیر پرواز[۲۲] در صفحه قائم توسط GPS اندازه‌گیری نمی‌شود، می‌توان آن‌را به‌صورت زیر تقریب زد:

$$\gamma_{GPS}=\sin^{-1}\left(\frac{\dot{z}}{\mathrm{v}_{GPS}}\right) \quad (۱۵.۲)$$

سپس از ترکیب دو معادله (۱۴.۲) و (۱۵.۲)، مولفه‌های سرعت باد زمینی به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

[22] Flight Path Angle

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \mathrm{v}_{\mathrm{GPS}} \begin{bmatrix} \cos\gamma_{\mathrm{GPS}} \cos\psi_{\mathrm{GPS}} \\ \cos\gamma_{\mathrm{GPS}} \sin\psi_{\mathrm{GPS}} \\ \sin\gamma_{\mathrm{GPS}} \end{bmatrix} \tag{۱۶.۲}$$

در این‌صورت، با درنظرگرفتن مولفه‌های سرعت باد به‌عنوان متغیرهای حالت ($\mathbf{x} = \mathbf{v}_w = \begin{bmatrix} w_n & w_e & w_d \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$) و مولفه‌های سرعت GPS به‌عنوان خروجی ($\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$) و همچنین، فرض وزش باد ثابت، معادلات در فضای حالت با توجه به روابط (۱۳.۲) و (۱۵.۲) به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = 0 \\ \mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{u} \end{cases} \tag{۱۷.۲}$$

در رابطه فوق، بردار ورودی از عبارت $\mathbf{u} = \mathrm{v} \begin{bmatrix} \cos\gamma \cos\chi \\ \cos\gamma \sin\chi \\ \sin\gamma \end{bmatrix}$ حاصل می‌شود. در این رابطه سرعت (v) توسط لوله پیتوت و زوایای مسیر پرواز در صفحه قائم و افقی (γ و χ) با استفاده از INS اندازه‌گیری می‌شود. همچنین، لازم به‌ذکر است که در عمل خروجی سنسور ($\mathbf{z}$) از رابطه (۱۵.۲) حاصل می‌شود. در نهایت، فیلتر کالمن قادر است تا متغیرهای حالت (مولفه‌های سرعت باد ثابت) را تخمین بزند. از محدودیت‌های این روش می‌توان به درنظرگرفتن باد ثابت و تقریب زاویه مسیر پرواز سامانه GPS اشاره کرد.

۲.۲.۱.۲ تخمین باد بر مبنای مدل دینامیکی پرنده

معادلات حرکت پرنده شامل نحوه تغییرات زمانی متغیرهای حالت، ورودی‌های کنترل و مولفه‌های باد هستند. در این‌صورت، می‌توان بردار شتاب باد را با اندازه‌گیری خروجی‌های پرنده و نیز پیش‌بینی حرکت پرنده با استفاده از مدل دینامیکی آن محاسبه کرد. این روش بیانگر محاسبه مولفه‌های سرعت باد مبتنی بر خروجی‌های پرنده است. در مرجع [۲۲]، معادلات انتقالی حرکت پرنده با فرض قرارگیری یک IMU[۲۳] در مرکز جرم پرنده به‌صورت زیر درنظر گرفته شده‌است:

[23] Inertial Measurement Unit

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{u} + \dot{w}_x + qw - rv + g\sin\theta \\ \dot{v} + \dot{w}_y + ru - pw - g\sin\phi\cos\theta \\ \dot{w} + \dot{w}_z + pv - qu - g\cos\theta\cos\phi \end{bmatrix} \quad (۱۸.۲)$$

در روابط فوق، $\begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix}^T$ بیانگر مولفه‌های شتاب در سیستم مختصات بدنی است. مولفه‌های شتاب در سیستم مختصات بدنی با فرض قرارگیری IMU در مرکز جرم پرنده معلوم است. در این‌صورت، بردار شتاب باد به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \dot{w}_x \\ \dot{w}_y \\ \dot{w}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{u} + qw - rv + g\sin\theta \\ \dot{v} + ru - pw - g\sin\phi\cos\theta \\ \dot{w} + pv - qu - g\cos\theta\cos\phi \end{bmatrix} \quad (۱۹.۲)$$

در نهایت، مولفه‌های سرعت باد با انتگرال‌گیری از بردار شتاب باد حاصل می‌شود. از جمله مشکلات این روش می‌توان به خطا در خروجی حسگر GPS، نویزی‌بودن و عدم دقت در خروجی‌های سنسور، وابستگی به مدل دینامیکی دقیق پرنده و وابستگی مدل دینامیکی پرنده به گرادیان باد اشاره کرد. این مشکلات باعث عدم دقت در پیش‌بینی سرعت و جهت باد می‌شود.

۳.۲.۱.۲ مقایسه روش‌های تخمین اغتشاشات اتمسفری

مقایسه بین مزایا و معایب انواع روش‌های تخمین در جدول ۱.۲ ارائه شده‌است.

جدول ۱.۲ مزایا و معایب انواع روش‌های تخمین

سیستم ناوبری	مزایا	معایب
روش مثلث باد	سادگی	هزینه زیاد ضرورت اندازه‌گیری زوایای حمله و لغزش نیاز به اندازه‌گیری زوایای اویلر خطا در خروجی حسگر GPS خطای نصب لوله پیتوت نویزی‌بودن خروجی‌های سنسور ضرورت تخمین متغیرهای حالت پرنده

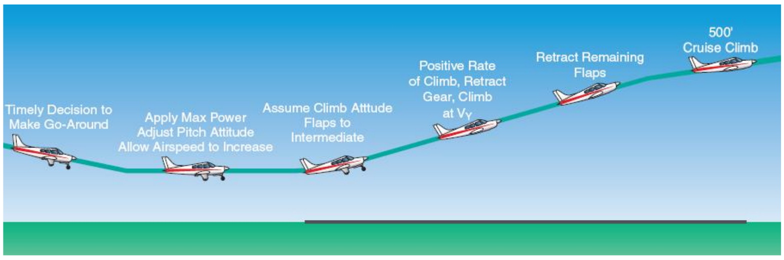
سیستم ناوبری	مزایا	معایب
تخمین باد بر مبنای مدل دینامیکی پرنده	هزینه کم سادگی	خطا در خروجی حسگر GPS نویزی‌بودن خروجی‌های سنسور عدم دقت در خروجی‌های سنسور وابستگی به مدل دینامیکی دقیق پرنده وابستگی مدل دینامیکی پرنده به گرادیان باد

۳.۱.۲ اثرات آیرودینامیکی اغتشاشات اتمسفری

یکی از موضوعات پژوهشی در زمینه تاثیر اغتشاشات اتمسفری در فرآیند فرود، بررسی نحوه تغییرات زمانی و مکانی مولفه‌های باد بر معادلات حرکت پرنده است. در این‌صورت، می‌توان با شبیه‌سازی اغتشاشات اتمسفری، معادلات حرکت را تصحیح کرد. همچنین، می‌توان عملکرد پرنده را درحضور اغتشاشات اتمسفری بررسی کرد. به‌عنوان نمونه، اغتشاشات فرکانس بالا نقش مهمی در تحریک سازه ایفا کرده و باعث پدیده مخرب فلاتر می‌شود. لذا، از دیدگاه کنترلی اغتشاشات فرکانس بالا باید به‌خوبی حذف شوند. از جمله مهم‌ترین پژوهش‌هایی که در زمینه اثرات آیرودینامیکی اغتشاشات اتمسفری بر معادلات حرکت پرنده انجام شده‌است، می‌توان به [۲۸] و [۲۹] اشاره کرد.

۴.۱.۲ اصلاح مسیر پروازی در حضور اغتشاشات اتمسفری

به‌منظور طراحی مسیر پروازی در حضور اغتشاشات اتمسفری پرنده‌های بدون سرنشین بال‌ثابت دو رویکرد وجود دارد. در رویکرد اول، پرنده مسیر بهینه را به‌منظور اجتناب از اغتشاشات اتمسفری انتخاب می‌کند. در این‌صورت، مسیر پروازی به‌گونه‌ای تعیین می‌شود که با ارضای قیود حاکم بر مسئله، شاخص عملکرد بهینه شود. به‌عنوان مثال، هنگامی که پرنده در فرآیند فرود با مایکروبرست مواجه می‌شود؛ با قرارگیری در بیشینه تراست و درنتیجه افزایش ارتفاع، فرآیند فرود را لغو کرده و یک مسیر پروازی بهینه را تعقیب می‌کند. نمونه‌ای از اجتناب از اغتشاشات اتمسفری در فرآیند فرود در شکل ۹.۲ نشان داده شده‌است.



شکل ۹.۲ اجتناب از اغتشاشات اتمسفری در فرآیند فرود.

هدف از رویکرد دوم، تعقیب مسیر نامی فرود توسط کنترل‌کننده در حضور اغتشاشات اتمسفری است. لذا پژوهش‌های انجام‌شده در این حوزه به دو دسته جبران‌سازی اغتشاشات اتمسفری در حلقه هدایت و عدم جبران اغتشاشات اتمسفری در حلقه هدایت طبقه‌بندی می‌شود. از آنجا که هدف از این رساله، جبران‌سازی اغتشاشات اتمسفری در حلقه هدایت است. لذا در ادامه تاثیر جبران‌سازی اغتشاشات اتمسفری در حلقه هدایت بیان می‌شود.

اغتشاشات اتمسفری باعث انحراف پرنده از مسیر مطلوب در فرآیند فرود می‌شود. به‌عنوان نمونه، پرنده در فرآیند فرود تحت وزش باد جانبی از باند فرود منحرف می‌شود. از این‌رو، مطلع‌بودن پرنده از سرعت باد و جبران آن در حلقه هدایت سبب جلوگیری از انحراف پرنده از مسیر مطلوب می‌شود. در مرجع [۳۰] یک کنترل‌کننده سری[۲۴] به‌منظور تعقیب ارتفاع مطلوب و نرخ آن در فرآیند فرود خودکار یک پرنده بدون سرنشین در مراحل سرش و چرخش طراحی شده‌است. سرعت‌های باد با استفاده از مدل درایدن در مدل شبیه‌سازی پرنده ایجاد شده و در حلقه هدایت جبران می‌شود. جبران سرعت باد در حلقه هدایت سبب تصحیح سرعت حقیقی پرنده و در نتیجه عدم انحراف پرنده از مسیر مطلوب در فرآیند فرود می‌شود.

۵.۱.۲ جبران‌سازی اغتشاشات اتمسفری در کنترل‌کننده

کنترل‌کننده‌های استفاده‌شده در حضور اغتشاشات اتمسفری به دو دسته طبقه‌بندی می‌شوند. در دسته اول، اغتشاشات اتمسفری مدل‌سازی شده و عملکرد کنترل‌کننده در حضور آن‌ها ارزیابی می‌شوند. در این حالت، مقاوم‌بودن کنترل‌کننده نسبت به اغتشاشات اتمسفری بررسی می‌شود. در دسته دوم، اغتشاشات اتمسفری در زمان حقیقی تخمین‌زده شده و در کنترل‌کننده جبران می‌شوند. از آنجا که هدف از این

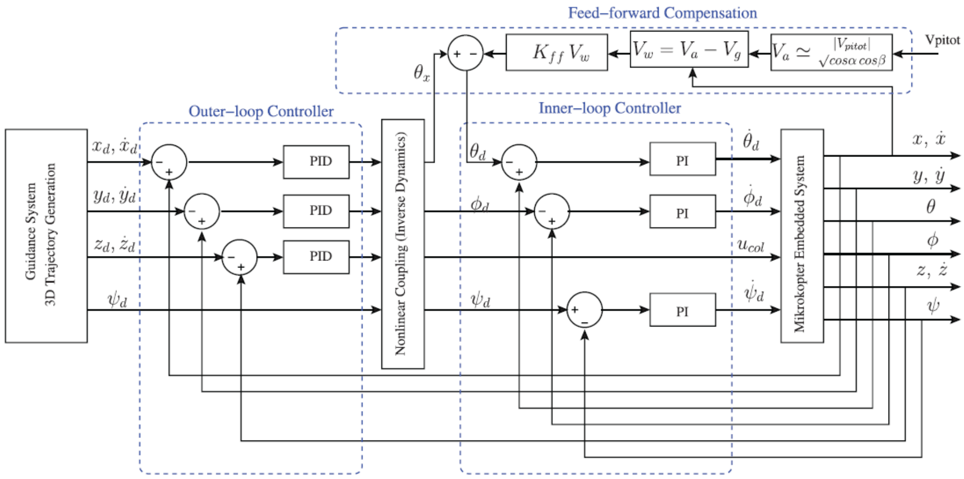
[24] Cascade

رساله، جبران‌سازی اغتشاشات اتمسفری در حلقه کنترل نیز هست. لذا در ادامه تاثیر جبران‌سازی اغتشاشات اتمسفری در کنترل‌کننده بیان می‌شود.

هر کنترل‌کننده‌ای، در مرحله طراحی نیاز به مدلی از سیستم دینامیکی دارد. بر خلاف بسیاری از انواع کنترل‌کننده‌ها که بعد از انجام طراحی، مدل سیستم کنار گذاشته می‌شود؛ در کنترل‌کننده‌های مبتنی بر مدل، این مدل در درون کنترل‌کننده به‌منظور بهبود عملکرد این دسته از کنترل‌کننده‌ها و حذف اغتشاش استفاده می‌شود. هر چه اطلاعات مدل ریاضی سیستم دقیق‌تر باشد، عملکرد کنترل‌کننده‌های مبتنی بر مدل بهتر خواهد بود. از این‌رو، جبران‌سازی اغتشاشات اتمسفری در کنترل‌کننده‌های مبتنی بر مدل سبب بهبود عملکرد این دسته از کنترل‌کننده‌ها می‌شود.

در مرجع [۳۱] سرعت باد در زمان حقیقی با استفاده از روش مثلث تخمین‌زده شده و در حلقه کنترل برای یک چهارپره مطابق با شکل ۱۱.۲ جبران‌سازی شده‌است. در این چهارپره از سنسورهای لوله پیتوت و سامانه موقعیت‌یاب جهانی به‌ترتیب برای اندازه‌گیری سرعت حقیقی هوا و سرعت زمینی به‌منظور شناسایی سرعت و جهت باد استفاده می‌شود. از آنجا که تنها لوله پیتوت در جهت محور x سیستم مختصات بدنی نصب شده‌است؛ لذا سرعت باد در این جهت شناسایی شده و تنها در حلقه پیچ کنترل‌کننده فیدفوروارد جبران می‌شود. شماتیک جبران سرعت باد در حلقه پیچ کنترل‌کننده فیدفوروارد برای چهارپره در شکل ۱۱.۲ نشان داده شده‌است. لازم به ذکر است که به‌منظور شناسایی سرعت فرض شده‌است که زوایای حمله و لغزش جانبی ناچیز هستند.

شکل ۱۰.۲ اجتناب از اغتشاشات اتمسفری در فرآیند فرود [۳۱].



شکل ۱۱.۲ جبران سرعت باد در کانال پیچ کنترل‌کننده فیدفوروارد برای چهارپره [۳۱].

۲.۲ مشاهده‌پذیری در حضور ورودی‌های نامعلوم

در مسائل مهندسی، انواع مختلفی از کنترل‌کننده‌ها به‌منظور ردگیری مقدار مطلوب در حضور ورودی‌های نامعلوم همچون اغتشاشات اتمسفری استفاده می‌شوند. این کنترل‌کننده‌ها به‌منظور تولید سیگنال‌های کنترلی دقیق ممکن است نیاز به تمام متغیرهای حالت و نیز اطلاعات ورودی‌های نامعلوم داشته باشند. در عمل، بعضی از متغیرهای حالت اندازه‌گیری نمی‌شوند و نیز ورودی‌های نامعلوم قابل اندازه‌گیری نیستند. بنابراین، مطالعه امکان‌پذیری تخمین متغیرهای حالت سیستم و ورودی‌های نامعلوم با استفاده از اندازه‌گیری ضروری است [۳۲]، که این فرآیند تحلیل مشاهده‌پذیری نامیده می‌شود.

تحقیقات انجام‌شده در تحلیل مشاهده‌پذیری سیستم‌های دینامیکی به مشاهده‌پذیری متغیرهای حالت[۲۵] [۳۲]، مشاهده‌پذیری قوی[۲۶] [۳۳]، مشاهده‌پذیری ورودی‌های نامعلوم[۲۷] [۳۴] و مشاهده‌پذیری توامان متغیرهای حالت و ورودی‌های نامعلوم[۲۸] طبقه‌بندی می‌شود. مشاهده‌پذیری متغیرهای حالت صرفاً به‌منظور بازیابی متغیرهای حالت بر مبنای اندازه‌گیری‌ها در حضور ورودی‌های معلوم تعریف می‌شود. از

[25] State Observability

[26] Strong Observability

[27] Unknown Input Observability

[28] Simultaneous State and Unknown Input Observability

این رو، مشاهده‌پذیری متغیرهای حالت نقش مهمی را در تخمین متغیرهـای حالـت یـک سیســتم ایفـا می‌کند.

تحلیل مشاهده‌پذیری متغیرهای حالت یک سیستم به ویژگی‌های مدل دینامیکی آن سیستم وابسته است. بنابراین، مشاهده‌پذیری متغیرهای حالت برای گروه‌های وسیعی از سیستم‌های دینامیکی هم‌چـون سیستم‌های دینامیکی همراه با تـاخیر زمـانی[۲۹] [۳۵]، سیســتم‌های منفـرد[۳۰] [۳۶]، سیســتم‌های پـرش مــارکوف[۳۱] [۳۷]، سیســـتم‌های پریودیــک[۳۲] [۳۸]، سیســـتم‌های خطــی نمونه‌برداری‌شــده[۳۳] [۳۹]، سیستم‌های دینامیکی غیرخطی هموار[۳۴] [۴۰]-[۴۱] و نـاهموار[۳۵] [۴۲] و نیـز سیســتم‌هـای غیرخطـی کنترل‌نشــده[۳۶] [۴۳] توســعه داده شده‌اســت. همچنــین، تحلیــل مشــاهده‌پذیری متغیــر حالــت بــرای سیستم‌های خطی [۳۲] توسط یک شرط لازم و کافی بـر مبنـای رنـک مـاتریس مشـاهده‌پذیری انجـام می‌شود. در مقابل، به‌منظور تحلیل مشاهده‌پذیری متغیرهای حالت برای سیسـتم‌های غیرخطـی تنهـا از یک شرط کافی بر مبنای مشتقات لی متوالی خروجی‌های سیستم استفاده می‌شود [۴۴]-[۴۵].

در مشاهده‌پذیری متغیرهای حالت، ورودی‌های سیستم معلوم فرض می‌شوند. با این وجـود، ممکـن است سیستم‌هایی متشکل از یک یا چند ورودی نامعلوم وجـود داشـته باشـند. در چنــین سیســتم‌هایی ورودی‌های نامعلوم می‌تواند دینامیک سیستم و در نتیجه شرط مشاهده‌پذیری متغیرهای حالت را تحـت تاثیر قرار دهد. به مفهوم مشاهده‌پذیری متغیرهای حالت در حضور ورودی‌های نـامعلوم، مشـاهده‌پذیری

[29] Time-delay Systems

[30] singular systems

[31] Markov jump systems

[32] Periodic Systems

[33] Sampled Systems

[34] Smooth Nonlinear Dynamic Systems

[35] Non-smooth Nonlinear Systems

[36] Uncontrolled Nonlinear systems

قوی [۳۳] گفته می‌شود. این مفهوم، در تحلیل مشاهده‌پذیری متغیرهای حالت در حضور ورودی‌های نامعلوم مانند خطای عملگر [۴۶]، میدان باد و اغتشاشات خارجی [۴۷] دارای اهمیت است.

تحلیل مشاهده‌پذیری قوی برای سیستم‌های خطی بر مبنای ارتباط بین ماتریس‌های مشاهده‌پذیری و معکوس‌پذیری حاصل می‌شود [۴۸]-[۴۹]. از این‌رو، شرط مشاهده‌پذیری قوی ارتباط بین متغیرهای حالت، خروجی‌های سیستم و ورودی‌های نامعلوم را بررسی می‌کند. همچنین، در مراجع [۵۰]-[۵۱] یک الگوریتم بازگشتی به‌منظور تحلیل مشاهده‌پذیری متغیرهای حالت در حضور یک ورودی نامعلوم ارائه شده‌است.

برخلاف مشاهده‌پذیری متغیرهای حالت و مشاهده‌پذیری قوی، مفهوم مشاهده‌پذیری ورودی‌های نامعلوم به بازیابی ورودی‌های نامعلوم با استفاده از اندازه‌گیری‌های سیستم می‌پردازد. از این‌رو، این مفهوم در بسیاری از مسائل کاربردی هم‌چون تشخیص خطا [۵۲]-[۵۳] و تخمین ورودی‌های نامعلوم در مساله کنترل موتور اتومبیل [۵۴] بکار برده می‌شود. در مرجع [۵۵]، یک الگوریتم بازگشتی به‌منظور تحلیل مشاهده‌پذیری ورودی نامعلوم برای یک سیستم غیرخطی ارائه شده‌است.

در نهایت، مفهوم مشاهده‌پذیری توامان متغیرهای حالت و ورودی‌های نامعلوم به مطالعه امکان‌پذیری تخمین توامان متغیرهای حالت سیستم و ورودی‌های نامعلوم با استفاده از ماتریس اندازه‌گیری‌های سیستم می‌پردازد. این مفهوم در بسیاری از سناریوهای واقعی هم‌چون کنترل سیستم‌های رباتیک [۵۶]، کنترل سیستم‌های الکتریکی [۵۷]، تخمین جمعیت [۵۸]، شناسایی خطا و تخمین متغیرهای حالت [۵۹] کاربرد دارد.

۳.۲ فیلترهای چندمدلی

در بسیاری از کاربردهای مهندسی، تغییرات دینامیک یک سیستم وابسته به یک مدل از بین مجموعه‌ای از مدل‌ها است. هر مدل توسط یک رابطه ریاضی بیان می‌شود. همچنین، پارامترهای یک مدل هم‌چون نویز فرآیند، تعداد ورودی‌ها و نیز ابعاد متغیرهای حالت می‌تواند متفاوت از دیگر مدل‌ها باشد. بنابراین، نیاز به یافتن مدل صحیح از بین مجموعه‌ای از مدل‌ها، پارامترهای مدل و نیز متغیرهای حالت سیستم با استفاده از خروجی‌های نویزی یک سیستم است. به این‌منظور، مجموعه‌ای از فیلترها، که هر کدام با یک مدل منطبق شده‌است، به‌صورت موازی اجرا می‌شود. در گام بعد، پس از محاسبه احتمال هر فیلتر، مدل

نهایی و متغیرهای حالت بر مبنای میانگین وزن‌دار نتایج هر فیلتر محاسبه می‌شود. این ساختار، فیلتر چندمدلی (MMF)[37] [۶۰] نامیده می‌شود.

در فیلترهای چندمدلی تابع توزیع احتمال با مجموع وزن‌دار چند تابع توزیع احتمال با چگالی گوسی تقریب‌زده می‌شود. از این‌رو، فیلترهای چندمدلی را فیلترهای مجموع گوسی (GSF)[38] نیز می‌نامند [۶۱]. بنابراین، در صورتیکه مدل دینامیکی سیستم یکتا نباشد و/یا در حین فرآیند تغییر کند، از فیلترهای چندمدلی به‌منظور تشخیص نوع مدل استفاده می‌شود. در فیلترهای چندمدلی فرض می‌شود سیستم دینامیکی از تعداد محدودی مدل تشکیل شده‌است. فیلترهای چندمدلی را می‌توان به دو دسته فیلتر چندمدلی استاتیکی (SMM)[39] [۶۲] و فیلترهای چندمدلی دینامیکی (DMM)[40] طبقه‌بندی کرد [۶۳].

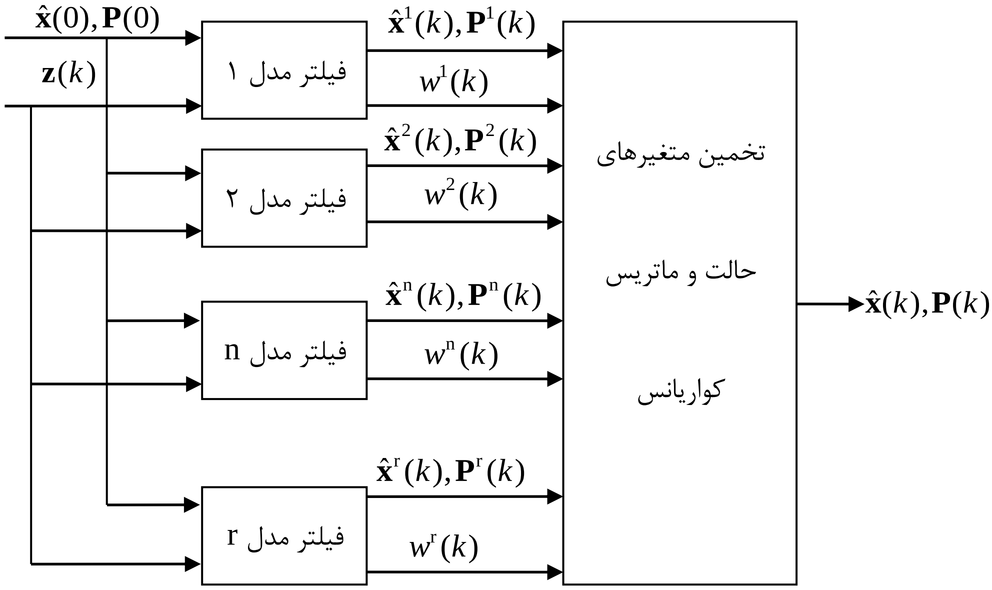
فیلتر چندمدلی استاتیکی به دنبال یافتن مدل صحیح از بین مجموعه‌ای از مدل‌هاست که رفتار آن منطبق بر دینامیک سیستم باشد. در این دسته از فیلترها فرض می‌شود که تعداد مدل‌ها ثابت و هر مدل دارای دینامیک مربوط به خودش است. همچنین، در این فیلترها، هیچ تغییری از یک مدل به مدل دیگر وجود ندارد. فیلترهای چندمدلی استاتیکی شامل مجموعه‌ای از فیلترها است که هر کدام با یک مدل منطبق شده و به‌صورت جداگانه کار می‌کنند. سپس، هر فیلتر علاوه بر محاسبه تخمین متغیرهای حالت و ماتریس کواریانس، ضریب وزنی را بر مبنای اختلاف خروجی تخمین‌زده شده با خروجی اندازه‌گیری نیز محاسبه می‌کند. در نهایت، خروجی فیلتر چندمدلی استاتیکی یک ترکیب گوسی است که از میانگین وزن‌دار تخمین متغیرهای حالت و ماتریس کواریانس هر فیلتر حاصل می‌شود. اثبات می‌شود که احتمال همگرایی مدل تخمین‌زده شده توسط فیلتر چندمدلی استاتیک به مدل واقعی یک است. شماتیک نحوه عملکرد فیلترهای چندمدلی استاتیک در شکل ۱۲.۲ نشان داده شده‌است.

[37] Multiple Model Filter

[38] Gaussian Sum Filter

[39] Static Multiple Model

[40] Dynamic Multiple Model



شکل ۱۲.۲ شماتیک نحوه عملکرد فیلترهای چندمدلی استاتیک.

در صورت تغییر یک مدل به مدل دیگر در طول زمان نمی‌توان از فیلتر چندمدلی استاتیکی به‌دلیل افزایش خطای ناشی از عدم تطبیق مدل با مدل واقعی استفاده کرد. در این حالت از فیلترهای چندمدلی دینامیکی استفاده می‌شود [۶۳]. فیلترهای چندمدلی دینامیکی با استفاده از قانون احتمالات می‌توانند احتمال تغییر یک مدل به مدل دیگر را درنظر بگیرند. در این روش، به‌منظور جلوگیری از افزایش حجم محاسبات، احتمال تغییر یک مدل به مدل دیگر مستقل از زمان درنظر گرفته می‌شود. فیلترهای دینامیکی را می‌توان به فیلترهای شبه‌بیزین تعمیم‌یافته مرتبه اول (GPB1)[۴۱] [۶۲]، شبه‌بیزین تعمیم‌یافته مرتبه دوم (GPB2)[۴۲] [۶۲] و فیلتر تعاملی چندمدلی (IMM)[۴۳] [۶۴] تقسیم‌بندی کرد.

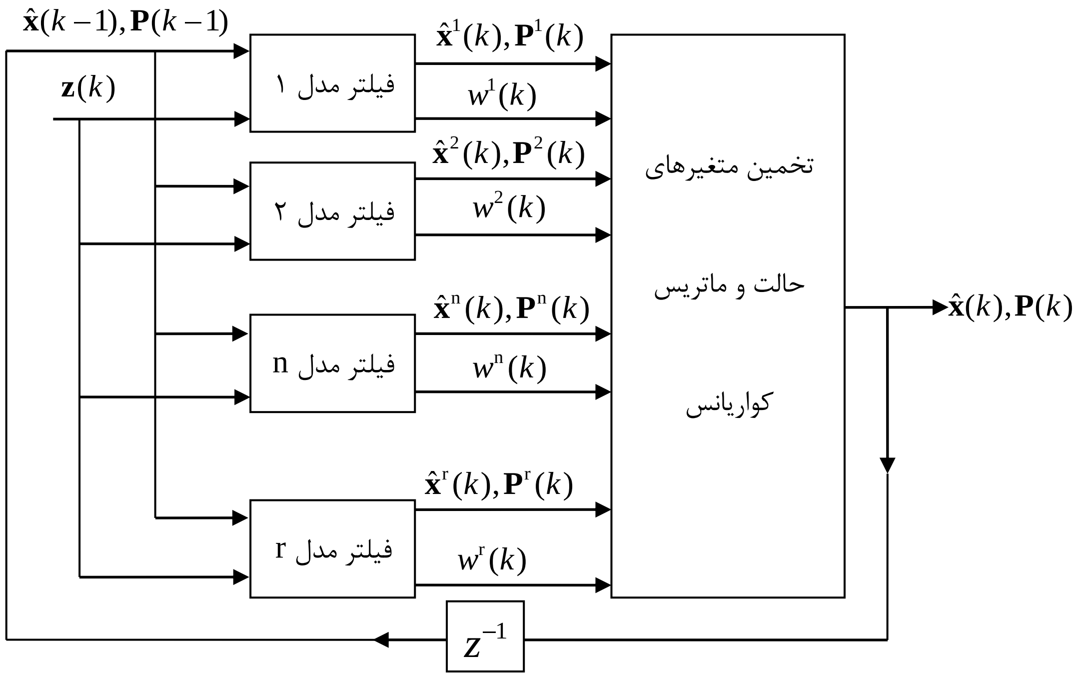
در روش فیلتر شبه‌بیزین تعمیم‌یافته مرتبه اول (GPB1)، متناظر با هر مدل یک فیلتر وجود دارد. هر فیلتر علاوه بر محاسبه تخمین متغیرهای حالت و ماتریس کواریانس، ضریب وزنی را بر مبنای اختلاف خروجی تخمین‌زده شده با خروجی اندازه‌گیری نیز محاسبه می‌کند. سپس، مقادیر اولیه هر فیلتر با استفاده از نتیجه تخمین در هر گام نمونه‌برداری به‌روزرسانی می‌شود. در نهایت، خروجی فیلتر

[41] First Order Generalized Pseudo-Baysian Approach

[42] Second Order Generalized Pseudo-Baysian Approach

[43] Interacting Multiple Moldel

شبه‌بیزین تعمیم‌یافته مرتبه اول از میانگین وزن‌دار تخمین متغیرهای حالت و ماتریس کواریانس به‌ازای هر فیلتر حاصل می‌شود. شماتیک نحوه عملکرد فیلترهای شبه‌بیزین تعمیم‌یافته مرتبه اول در شکل ۱۳.۲ نشان داده شده‌است.



شکل ۱۳.۲ شماتیک نحوه عملکرد فیلترهای شبه‌بیزین تعمیم‌یافته مرتبه اول.

در روش فیلتر شبه‌بیزین تعمیم‌یافته مرتبه دوم (GPB2)، تعداد فیلترها به اندازه مربع تعداد مدل‌ها است. در این‌صورت، هر فیلتر علاوه بر محاسبه تخمین متغیرهای حالت و ماتریس کواریانس، ضریب وزنی را بر مبنای اختلاف خروجی تخمین‌زده شده با خروجی اندازه‌گیری نیز محاسبه می‌کند. سپس، نتایج هر یک از فیلترهای مرتبط با هر مدل با یکدیگر ادغام می‌شود. در این صورت، تعداد تخمین‌ها با تعداد مدل‌ها برابر می‌شود. در گام بعد، از نتیجه این بخش به‌عنوان شرط ابتدایی برای هر فیلتر در هر گام نمونه‌برداری استفاده می‌شود. در نهایت، خروجی فیلتر شبه‌بیزین تعمیم‌یافته مرتبه دوم از میانگین وزن‌دار تخمین متغیرهای حالت و ماتریس کواریانس به‌ازای هر فیلتر حاصل می‌شود. شماتیک نحوه عملکرد فیلترهای شبه‌بیزین تعمیم‌یافته مرتبه دوم در شکل ۱۴.۲ نشان داده شده‌است.

فیلترهای تعاملی چندمدلی (IMM) مشابه با فیلترهای شبه‌بیزین تعمیم‌یافته مرتبه دوم است؛ اما، در این دسته از فیلترها، تعامل در ابتدای چرخه انجام می‌شود. در فیلتر تعاملی چندمدلی، تعداد فیلتر به

تعداد مدل مورد نیاز است. از این‌رو، هر فیلتر علاوه بر محاسبه تخمین متغیرهای حالت و ماتریس کواریانس، ضریب وزنی را بر مبنای اختلاف خروجی تخمین‌زده‌شده با خروجی اندازه‌گیری‌شده نیز محاسبه می‌کند. در نهایت، خروجی فیلترهای تعاملی چندمدلی از میانگین وزن‌دار تخمین متغیرهای حالت و ماتریس کواریانس به‌ازای هر فیلتر حاصل می‌شود. لازم به‌ذکر است که در هر گام نمونه‌برداری شرایط اولیه هر فیلتر از تعامل بین نتیجه تخمین با مقدار احتمال به‌روزرسانی‌شده حاصل می‌شود. شماتیک نحوه عملکرد فیلترهای تعاملی چندمدلی در شکل ۱۵.۲ نشان داده شده‌است.

از جنبه دیگر، فیلترهای چندمدلی به دو دسته فیلترهای چندمدلی خطی[44] و فیلترهای چندمدلی غیرخطی[45] تقسیم‌بندی می‌شوند. در یک فیلتر چندمدلی خطی مانند فیلتر کالمن چندمدلی (MMKF)[46] [۶۵]، برای هر فیلتر منطبق با هر مدل، از فیلتر کالمن (KF)[47] [۶۶] استفاده شده و در نتیجه تابع توزیع احتمال پسین برای هر فیلتر به‌صورت گوسی فرض می‌شود. در مقابل، هنگامی‌که مدل‌ها غیرخطی هستند؛ یک فیلتر چندمدلی غیرخطی همچون فیلتر کالمن توسعه‌یافته چندمدلی (MMEKF)[48] [۶۷] و فیلتر کالمن Unscented چندمدلی (MMUKF)[49] [۶۸] به‌منظور تخمین مدل واقعی و نیز متغیرهای حالت یک سیستم غیرخطی استفاده می‌شود.

فیلترهای چندمدلی مبتنی بر تقریب تحلیلی (MMAF)[50] و فیلترهای چندمدلی مبتنی بر نمونه‌برداری (MMSBF)[51] از بارزترین فیلترهای چندمدلی غیرخطی به‌شمار می‌روند. در فیلترهای چندمدلی مبتنی بر تقریب تحلیلی، ابتدا مدل‌های غیرخطی خطی‌سازی شده و سپس از فیلتر خطی

---

[44] Linear Multiple Model Filter

[45] Nonlinear Multiple Model Filter

[46] Multiple Model Kalman Filter

[47] Kalman Filter

[48] Multiple Model Extended Kalman Filter

[49] Multiple Model Unscented Kalman Filter

[50] Multiple Model Analytical Approximation Filter

[51] Multiple Model Sample Based Filter

هم‌چون فیلتر کالمن برای هر فیلتر منطبق با مدل استفاده می‌شود. فیلتر چندمدلی کالمن توسعه‌یافته (MMEKF) [۶۷] مثالی از این نوع فیلترها است.

فیلتر چندمدلی کالمن Unscented (MMUKF) [۶۸] جزو خانواده فیلترهای چندمدلی مبتنی بر نمونه‌برداری محسوب می‌شود. این روش از مجموعه‌ای از ذرات معین به‌منظور تقریب تابع توزیع احتمال پسین و از یک رگرسیون خطی مانند فیلتر کالمن برای هر فیلتر منطبق با هر مدل استفاده می‌کند. با این وجود، فیلترهای چندمدلی MMEKF و MMUKF توانایی تشخیص مدل واقعی و تخمین متغیرهای حالت یک سیستم غیرخطی را در حضور نویز غیرگوسی ندارند [۶۹].

به‌منظور حل این مشکل، در گروهی از فیلترهای چندمدلی مبتنی بر نمونه‌برداری (MMSBF) از الگوریتم‌های ابتکاری استفاده شده‌است. این دسته از فیلترهای چندمدلی، فیلترهای چندمدلی ابتکاری (MMHF)[۵۲] نامیده می‌شوند. فیلتر ذرات چندمدلی (MMPF)[۵۳] [۷۰] نمونه‌ای از فیلترهای چندمدلی ابتکاری است. فیلتر ذرات چندمدلی برخلاف MMUKF شامل مجموعه‌ای از ذرات تصادفی به‌منظور بیان تابع توزیع احتمال پسین [۷۱] است و نیز از فرآیند باز نمونه‌برداری[۵۴] به‌منظور جلوگیری از واگرایی ذرات برای هر فیلتر منطبق با مدل استفاده می‌کند. با استفاده از فرآیند باز نمونه‌برداری شانس انتخاب ذرات با اهمیت افزایش یافته و از تنوع بیش‌ازحد ذرات جلوگیری می‌شود. فیلتر ذرات سیستم پرش مارکوف (JMS-PF)[۵۵] [۷۲]-[۷۳]، فیلتر ذرات چندمدلی کمکی (AUX-PF)[۵۶] [۷۴] و فیلتر ذرات چندمدلی تعاملی (IMMPF)[۵۷] [۷۵] از معروف‌ترین الگوریتم‌های فیلتر ذرات چندمدلی هستند.

در روش فیلتر ذرات سیستم پرش مارکوف، هر کدام از ذرات یک مدل را به خود اختصاص می‌دهد. به‌عبارت دیگر، مدل‌ها به تعداد ذرات تکرار می‌شوند. سپس این ذرات با استفاده از مدل دینامیکی

[52] Multiple Model Heuristic Filter

[53] Multiple Model Particle Filter

[54] Resampling

[55] Jump Markov System Particle Filter

[56] Auxilary Multiple Model Particle Filter

[57] Interacting Multiple Model Particle Filter

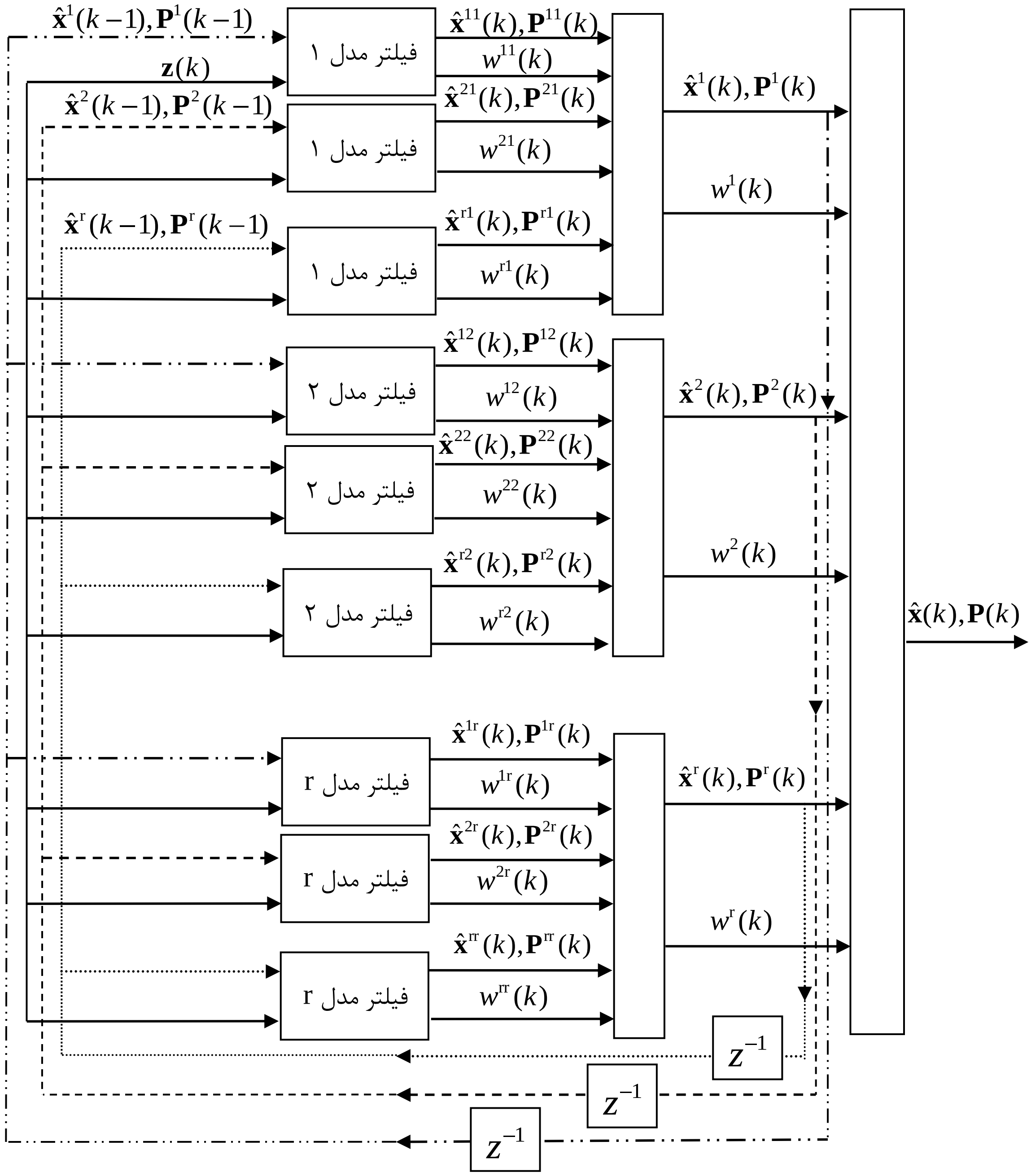
سیستم در مرحله نمونه‌برداری انتشار می‌یابند. در مرحله بعد، مشابه با الگوریتم فیلتر ذرات، پس از محاسبه وزن هر یک از این ذرات و نرمالیزه‌کردن آن‌ها با استفاده از یک الگوریتم بازنمونه‌برداری، ذرات با وزن بالاتر انتخاب می‌شوند. در انتها، متغیر حالت و نوع مدل با استفاده از میانگین‌گیری وزنی از ذرات حاصل از الگوریتم بازنمونه‌برداری تخمین‌زده می‌شود.

در مقابل در روش فیلتر ذرات چندمدلی کمکی، تعداد $N \times r$ ذره، که N و r به‌ترتیب بیانگر تعداد متغیرهای حالت و تعداد مدل‌ها هستند، در فضا توزیع می‌شوند. سپس، این ذرات با استفاده از مدل دینامیکی سیستم در مرحله نمونه‌برداری انتشار می‌یابند. در مرحله بعد، وزن هر یک از این ذرات محاسبه می‌شود. در گام بعد، با استفاده از یک الگوریتم بازنمونه‌برداری تعداد N ذره با وزن بالاتر انتخاب می‌شود. در انتها، مجدداً مراحل الگوریتم فیلتر ذرات خالص شامل انتشار ذرات، محاسبه وزن آن‌ها، نرمالیزه‌کردن، بازنمونه‌برداری ذرات و میانگین‌گیری وزنی از ذرات با اهمیت تکرار می‌شود. الگوریتم فیلتر ذرات چندمدلی کمکی در شکل ۱۶.۲ نشان داده شده‌است.

فیلتر ذرات چندمدلی، از آنجا که یک تخمین‌گر زیربهینه است، دارای مشکلاتی هم‌چون فقر ذرات[58] است. در صورتیکه تابع توزیع احتمال خیلی باریک باشد؛ فقر ذرات رخ می‌دهد. در این‌صورت، تعداد ذرات کمی در منطقه‌ای با توزیع احتمال زیاد وجود داشته و بیشتر ذرات در منطقه‌ای با توزیع احتمال کم هستند [۷۶]-[۷۷]. از این‌رو، با کوچک‌شدن وزن بیشتر ذرات، دقت تخمین کاهش می‌یابد. فقر ذرات در شکل ۱۷.۲ نشان داده شده‌است. همانطور که مشاهده می‌شود، به‌دلیل فقر ذرات، تعداد ذرات کمی دارای وزن موثری هستند و در نتیجه ذرات با ارزش از دست می‌روند.

یکی دیگر از مشکلات فیلتر ذرات چندمدلی وابستگی به تعداد ذرات است. اگر تعداد ذرات نسبتاً کم باشد؛ آنگاه توزیع صحیح ذرات حول متغیرهای حالت واقعی رخ نمی‌دهد. همچنین، اگر تعداد ذرات زیاد باشد؛ آنگاه حجم محاسباتی افزایش یافته و کاربردهای زمان حقیقی غیرممکن می‌شود.

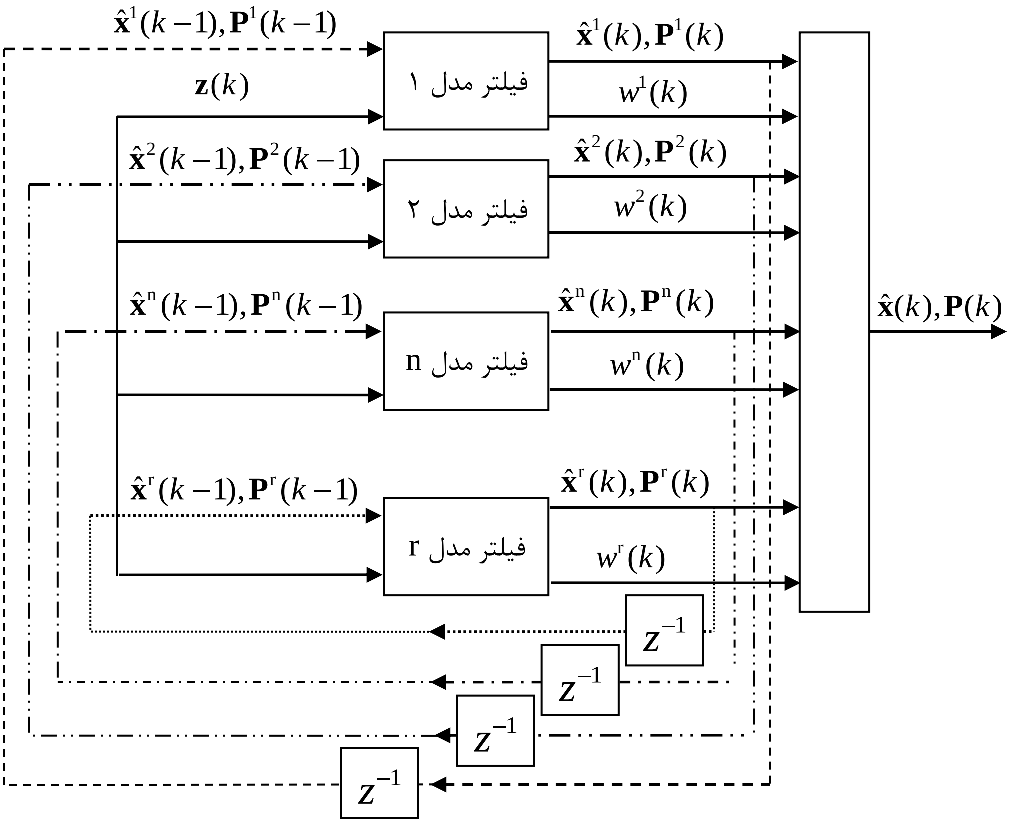
[58] Particle Impoverishment



شکل ۱۴.۲ شماتیک نحوه عملکرد فیلترهای شبه‌بیزین تعمیم‌یافته مرتبه دوم.

به‌منظور حل مشکلات فیلتر ذرات چندمدلی، در گروهی از فیلترهای چندمدلی ابتکاری از الگوریتم‌های بهینه‌سازی مبتنی بر هوش دسته‌جمعی به‌منظور جستجوی فضای حالت و در نتیجه یافتن بهترین مدل استفاده می‌شود. این دسته از فیلترها، فیلترهای چندمدلی ابتکاری مبتنی بر هوش

دسته‌جمعی (MMSF)[۵۹] نامیده می‌شوند. از این جمله، می‌توان بـه ترکیـب فیلتـر ذرات چندمـدلی بـا الگوریتم بهینه‌سازی گروهی ذرات (PSO)[۶۰] [۷۸] اشاره کرد. در این روش، بـه‌منظور هـدایت مجموعـه ذرات بـه سـمت منطقـه‌ای بـا توزیـع احتمـال زیـاد، الگـوریتم بهینه‌سـازی گروهـی ذرات بـا فرآینـد نمونه‌برداری[۶۱] فیلتر ذرات چندمدلی ادغام شده‌است. بنابراین، تکنیک‌های مختلـف هـوش دسـته‌جمعی می‌تواند به‌منظور تخمین متغیرهای حالت در حضور مدل‌های رفتاری گوناگون یک سیستم توسـعه داده شوند.



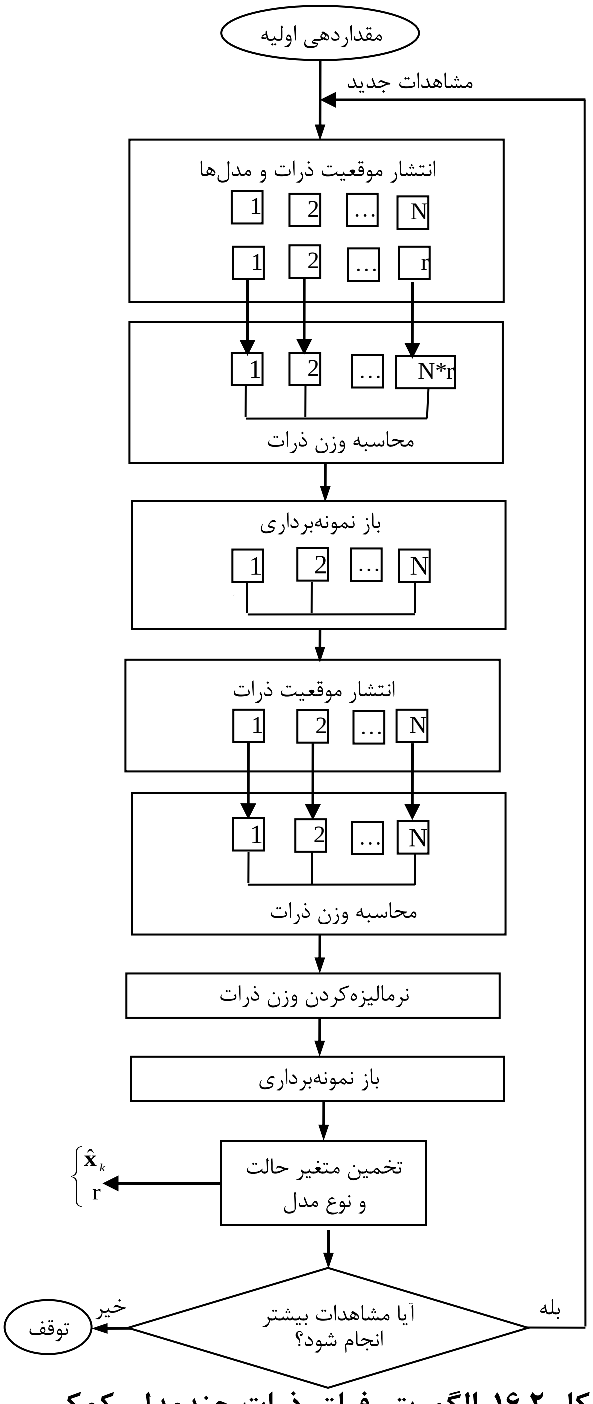
شکل ۱۵.۲ شماتیک نحوه عملکرد فیلترهای تعاملی چندمدلی.

---

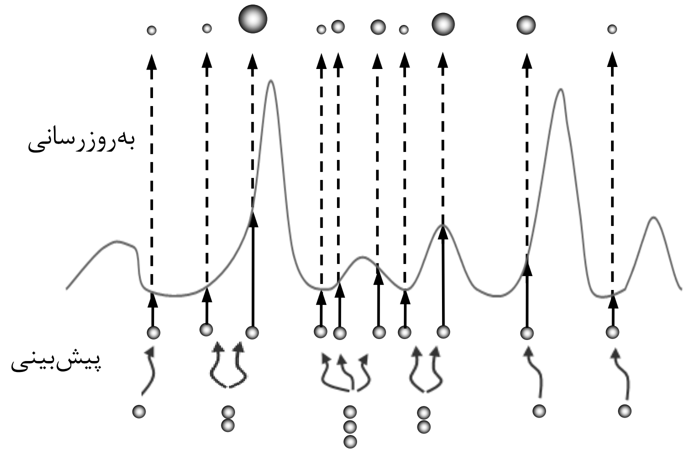
[59] Multiple Model Swarm Filter

[60] Particle Swarm Optimization

[61] sampling process



شکل ۱۶.۲ الگوریتم فیلتر ذرات چندمدلی کمکی.



شکل ۱۷.۲ فقر ذرات ناشی از باریک‌بودن تابع توزیع احتمال بالا.

۴.۲ نتیجه‌گیری و بیان نوآوری‌ها

مسئله مورد بررسی در این رساله، تخمین برخط مدل اغتشاشات اتمسفری و جبران‌سازی آن در حلقه‌های هدایت و کنترل به‌منظور توسعه الگوریتم فرود خودکار یک پرنده بدون سرنشین بال‌ثابت است. به‌این‌منظور، نوع مدل باد، پارامترهای مدل باد و نیز متغیرهای حالت پرنده در طول پرواز با استفاده از فیلترهای چندمدلی تخمینگر باد (MMWE)[62] تخمین زده می‌شود. در هیچ یک از مراجع موجود، که به مسئله تخمین اغتشاشات اتمسفری پرداخته‌اند، تخمین نوع مدل باد درنظر گرفته نشده‌است. از آنجا که پرواز تحت تاثیر اغتشاشات اتمسفری است، مدل‌های باد ثابت، باد "1-cosine"، باد برشی و نیز مایکروبرست به‌طور نمونه درنظر گرفته می‌شود.

سپس، به‌منظور تخمین نوع مدل باد از فیلترهای چندمدلی ابتکاری مبتنی بر هوش جمعی استفاده می‌شود. به‌این منظور با تعمیم الگوریتم‌های هوش جمعی، یک فیلتر چندمدلی ابتکاری جدید که مبتنی بر هوش دسته‌جمعی است، ارائه می‌شود. فیلتر جدید مساله تخمین را به‌صورت یک مساله بهینه‌سازی دینامیکی مدل کرده و بهترین مدل را در هر لحظه پیدا می‌کند. نتایج فیلتر جدید در فرآیند فرود خودکار ارزیابی می‌شود.

[62] Multiple Model Wind Estimator

همچنین، مشاهده‌پذیری متغیرهای حالت پرنده و نیز مدل باد تحلیل می‌شود. در هیچ یک از مقالات قبلی، این شرایط برای یک پرنده بدون سرنشین بررسی نشده‌است. به این‌منظور، از تئوری مشاهده‌پذیری متغیرهای حالت و مشاهده‌پذیری قوی برای سیستم‌های خطی پیوسته و گسسته استفاده می‌شود.

در گام بعد، از تئوری‌ها مشاهده‌پذیری ورودی‌های نامعلوم و نیز مشاهده‌پذیری توأمان متغیرهای حالت و ورودی‌های نامعلوم برای سیستم‌های خطی پیوسته و گسسته، به‌منظور تحلیل مشاهده‌پذیری پرنده استفاده می‌شود. در هیچ یک از مقالات قبلی، که به مسئله مشاهده‌پذیری ورودی‌های نامعلوم پرداخته‌اند، شرایط مشاهده‌پذیری ورودی‌های نامعلوم و نیز مشاهده‌پذیری توأمان متغیرهای حالت و ورودی‌های نامعلوم استخراج نشده‌است. همچنین، شرایط مشاهده‌پذیری متغیرهای حالت، مشاهده‌پذیری قوی، مشاهده‌پذیری ورودی‌های نامعلوم و نیز مشاهده‌پذیری توأمان متغیرهای حالت و ورودی‌های نامعلوم برای یک سیستم غیرخطی افاین پیوسته استخراج می‌شود.

به‌منظور اثبات امکان پیاده‌سازی فیلتر چندمدلی، شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه (HIL)[63] فیلتر چندمدلی انجام می‌شود. در هیچ یک از مقالات قبلی، که به مساله اعتبارسنجی تخمین اغتشاشات اتمسفری پرداخته‌اند، شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه فیلتر چندمدلی انجام نشده‌است. در نهایت، نتایج تخمین باد با استفاده از فیلتر چندمدلی در کنترل‌کننده پیش‌بین جبران‌سازی می‌شود. در هیچ یک از مقالات قبلی جبران‌سازی مدل باد در کنترل‌کننده پیش‌بین درنظر گرفته نشده‌است. همچنین، به‌منظور بهبود عملکرد فرآیند فرود خودکار، جبران‌سازی مدل باد در حلقه هدایت نیز درنظر گرفته می‌شود.

[63] Hardware in the Loop

۳ مدل‌سازی دینامیکی پرنده و پدیده باد

مدل‌سازی ریاضی اولین گام در طراحی سامانه‌های هوافضایی محسوب می‌شود. در این فصل، ابتدا دینامیک پرنده در بخش ۱.۳ با استفاده از قوانین پایه و معادلات حاکم بر حرکت به‌صورت مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل بیان می‌شود. سپس، در بخش ۵.۱.۳ مدل‌سازی پدیده باد شامل مدل‌های باد معین و تصادفی بیان می‌شود.

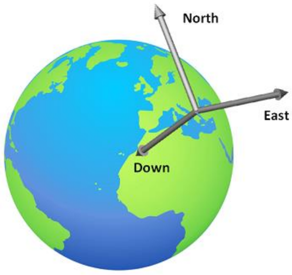
۱.۳ مدل‌سازی دینامیکی پرنده بدون سرنشین

به‌منظور دستیابی به معادلات حرکت شش‌درجه‌آزادی پرنده، ابتدا در بخش ۱.۱.۳ سیستم‌های مختصات معرفی خواهند شد. سپس، در بخش ۲.۱.۳ نیروها و گشتاورهای خارجی وارد بر پرنده بررسی می‌شوند. در گام بعد، مدل‌سازی سنسورها و معادلات تصادفی به‌ترتیب در بخش‌های ۳.۱.۳ و ۴.۱.۳ ارائه می‌شوند. در انتها، معادلات غیرخطی پرنده در بخش ۵.۱.۳ خطی‌سازی می‌شود.

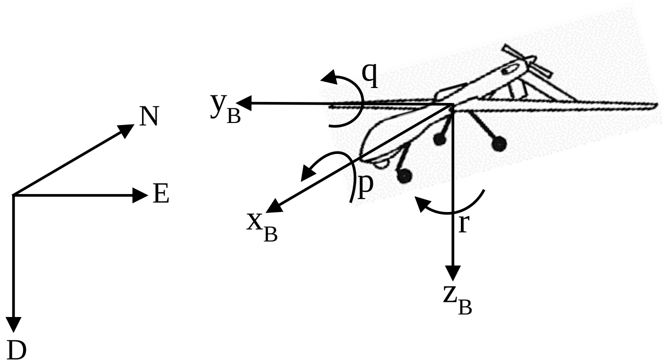
۱.۱.۳ سیستم‌های مختصات

به‌منظور توصیف حرکت شش‌درجه‌آزادی و نیز کنترل پرنده بودن سرنشین بال‌ثابت، معمولاً دستگاه‌های مختصات بدنی[1] و جغرافیایی (NED) تعریف می‌شوند (شکل ۱.۳ و شکل ۲.۳). دستگاه مختصات بدنی متحرک و متصل به مرکز جرم پرنده (O_{xyz}) است. در این سیستم، محورهای x_B و y_B به‌ترتیب به‌سمت دماغه و بال سمت راست پرنده هستند و محور z_B با توجه به قانون دست راست تعریف می‌شود. در دستگاه مختصات NED، محورهای N، E و D به‌ترتیب در امتداد شمال محلی، شرق و مرکز زمین هستند.

[1] Body Coordinate System



شکل ۱.۳ دستگاه مختصات NED.



شکل ۲.۳ تعاریف قاب‌های بدنی و NED.

۲.۱.۳ مدل‌سازی پرنده

به‌منظور مدل‌سازی معادلات حرکت شش‌درجه‌آزادی پرنده شامل معادلات سینماتیک و دینامیک از روش نیوتن-اویلر [۷۹] استفاده می‌شود. در این‌صورت، این معادلات به‌صورت زیر بیان می‌شوند [۸۰]:

$$\dot{\mathbf{p}}^{\mathbf{N}} = \mathbf{C}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{N}} \mathbf{v}_g^{\mathbf{B}} \tag{۱.۳}$$

$$\dot{\mathbf{v}}_g^{\mathbf{B}} = \frac{1}{\mathrm{m}} \mathbf{f}^{\mathbf{B}} - \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{NB}}^{\mathbf{B}} \times \mathbf{v}_g^{\mathbf{B}} \tag{۲.۳}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin\phi \,\mathrm{tg}\theta & \cos\phi \,\mathrm{tg}\theta \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi \sec\theta & \cos\phi \sec\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \tag{۳.۳}$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathbf{NB}}^{\mathbf{B}} = \mathbf{J}^{-1} \left[-\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{NB}}^{\mathbf{B}} \times \left(\mathbf{J}\, \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{NB}}^{\mathbf{B}} \right) + \mathbf{m}^{\mathbf{B}} \right] \tag{۴.۳}$$

در معادلات فوق، $\mathbf{p^N}=[p_n \;\; p_e \;\; p_d]^{\mathrm{T}}$ و $\mathbf{v_g^B}=[u \;\; v \;\; w]^{\mathrm{T}}$ به‌ترتیب بیانگر موقعیت پرنده در سیستم مختصات NED و سرعت انتقالی پرنده نسبت به سیستم مختصات NED بیان‌شده در سیستم مختصات بدنی هستند. همچنین، $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{NB}}^{\mathbf{B}}=[p \;\; q \;\; r]^{\mathrm{T}}$ نشان‌دهنده سرعت زاویه‌ای قاب بدنی نسبت به سیستم مختصات NED بیان‌شده در سیستم مختصات بدنی است. به‌علاوه، $[\phi,\ \theta,\ \psi]$ و m به‌ترتیب بیانگر زوایای اویلر و جرم پرنده هستند. همچنین، $\mathbf{C_B^N}$ بیانگر ماتریس کسینوس‌های هادی (DCM)[1] به‌منظور تبدیل سیستم مختصات بدنی به سیستم مختصات NED است؛ که به‌صورت زیر محاسبه می‌شود [۸۰]:

$$\mathbf{C_B^N}=\begin{bmatrix} \mathrm{c}_\theta \mathrm{c}_\psi & \mathrm{s}_\phi \mathrm{s}_\theta \mathrm{c}_\psi - \mathrm{c}_\phi \mathrm{s}_\psi & \mathrm{c}_\phi \mathrm{s}_\theta \mathrm{c}_\psi + \mathrm{s}_\phi \mathrm{s}_\psi \\ \mathrm{c}_\theta \mathrm{s}_\psi & \mathrm{s}_\phi \mathrm{s}_\theta \mathrm{s}_\psi + \mathrm{c}_\phi \mathrm{c}_\psi & \mathrm{c}_\phi \mathrm{s}_\theta \mathrm{s}_\psi - \mathrm{s}_\phi \mathrm{c}_\psi \\ -\mathrm{s}_\theta & \mathrm{s}_\phi \mathrm{c}_\theta & \mathrm{c}_\phi \mathrm{c}_\theta \end{bmatrix} \qquad (۵.۳)$$

که s_φ و c_φ به‌ترتیب نشان‌دهنده $\sin\varphi$ و $\cos\varphi$ هستند. $\mathbf{J}$ نیز بیانگر ماتریس ممان اینرسی است؛ که به‌صورت زیر بیان می‌شود [۸۰]:

$$\mathbf{J}=\begin{bmatrix} \int (y^2+z^2)\,d\mathrm{m} & 0 & -\int x\,z\,d\mathrm{m} \\ 0 & \int (x^2+z^2)\,d\mathrm{m} & 0 \\ -\int x\,z\,d\mathrm{m} & 0 & \int (x^2+z^2)\,d\mathrm{m} \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \mathrm{J_{xx}} & 0 & -\mathrm{J_{xz}} \\ 0 & \mathrm{J_{yy}} & 0 \\ -\mathrm{J_{xz}} & 0 & \mathrm{J_{zz}} \end{bmatrix} \qquad (۶.۳)$$

در معادله فوق، $\mathrm{J_{xx}}$، $\mathrm{J_{yy}}$ و $\mathrm{J_{zz}}$ به‌ترتیب بیانگر ممان‌های اینرسی اصلی و $\mathrm{J_{xz}}$ بیانگر ممان اینرسی ضربی هستند. همچنین، $\mathbf{f^B}=[f_x \;\; f_y \;\; f_z]^{\mathrm{T}}$ نشان‌دهنده برآیند نیروهای خارجی اعمالی به پرنده است؛ که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{f^B}=\mathbf{C_N^B}\mathbf{f_g^N}+\mathbf{f_a^B}+\mathbf{f_p^B} \qquad (۷.۳)$$

در رابطه فوق، $\mathbf{f_g^N}$ بیانگر نیروی جاذبه بیان‌شده در سیستم مختصات NED است. همچنین، $\mathbf{f_a^B}$ نیروی آیرودینامیکی بیان‌شده در سیستم مختصات بدنی است؛ که به‌صورت زیر محاسبه می‌شود [۷۹]:

[1] Direction Cosine Matrix

$$\mathbf{f}_{\mathrm{a}}^{\mathbf{B}}=\frac{1}{2}\rho V_{\mathrm{a}}{}^{2}\mathrm{S}\begin{bmatrix} C_{x_0}+C_{x_\alpha}\alpha+C_{x_q}\dfrac{q_{\mathrm{rel}}\bar{\mathrm{c}}}{2V_{\mathrm{a}}}+C_{x_{\delta_\mathrm{e}}}\delta_{\mathrm{e}} \\ C_{\mathrm{y}_0}+C_{\mathrm{y}_\beta}\beta+\left(C_{\mathrm{y}_p}p_{\mathrm{rel}}+C_{\mathrm{y}_r}r_{\mathrm{rel}}\right)\dfrac{\mathrm{b}}{2V_{\mathrm{a}}}+C_{\mathrm{y}_{\delta_\mathrm{a}}}\delta_{\mathrm{a}}+C_{\mathrm{y}_{\delta_\mathrm{r}}}\delta_{\mathrm{r}} \\ C_{z_0}+C_{z_\alpha}\alpha+C_{z_q}\dfrac{q_{\mathrm{rel}}\bar{\mathrm{c}}}{2V_{\mathrm{a}}}+C_{z_{\delta_\mathrm{e}}}\delta_{\mathrm{e}} \end{bmatrix} \quad (۸.۳)$$

که S، ρ، $\bar{\mathrm{c}}$ و b به‌ترتیب بیانگر سطح مرجع (بال)، چگالی، میانگین وتر آیرودینـامیکی[1] و طـول بـال[2] هستند. همچنین، V_{a} نشان‌دهنده سرعت هوا است؛ که به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$V_{\mathrm{a}}=\left\|\mathbf{v}_{\mathrm{a}}^{\mathbf{B}}\right\|=\sqrt{u_{\mathrm{rel}}^{2}+v_{\mathrm{rel}}^{2}+w_{\mathrm{rel}}^{2}} \quad (۹.۳)$$

که $\mathbf{v}_{\mathrm{a}}^{\mathbf{B}}=\left[u_{\mathrm{rel}} \quad v_{\mathrm{rel}} \quad w_{\mathrm{rel}}\right]^{\mathrm{T}}$ بیانگر سرعت پرنده نسبت به بـاد بیان‌شـده در سیســتم مختصـات بـدنی است؛ که به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{v}_{\mathrm{a}}^{\mathbf{B}}=\mathbf{v}_{\mathrm{g}}^{\mathbf{B}}-\mathbf{C}_{\mathbf{N}}^{\mathbf{B}}\mathbf{v}_{\mathrm{w}}^{\mathbf{N}} \quad (۱۰.۳)$$

در معادله فوق، $\mathbf{v}_{\mathrm{w}}^{\mathbf{N}}=\left[w_n \quad w_e \quad w_d\right]^{\mathrm{T}}$ بیانگر سرعت باد بیان‌شده در سیستم مختصات NED اسـت. همچنین، α و β به‌ترتیب نشان‌دهنده زاویه حمله و زاویه لغزش جانبی هستند. به‌علاوه، C_{x_i} و C_{z_i} به‌ازای $i=0,\alpha,q,\delta_{\mathrm{e}}$ بیانگر ضرایب آیرودینامیکی طولی بی بعد هستند؛ که به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$C_{x_i}=-C_{\mathrm{D}_i}\cos\alpha+C_{\mathrm{L}_i}\sin\alpha \quad (۱۱.۳)$$

$$C_{z_i}=-C_{\mathrm{D}_i}\sin\alpha-C_{\mathrm{L}_i}\cos\alpha \quad (۱۲.۳)$$

در رابطه فوق، C_{L} و C_{D} به‌ترتیب ضرایب لیفت و درگ هستند. همچنـین، C_{y_i} در رابطـه (۸.۳) بـه‌ازای $i=0,\beta,p,r,\delta_{\mathrm{a}},\delta_{\mathrm{r}}$ نشـان‌دهنده ضـرایب نیـروی آیرودینامیـک عرضـی هسـتند. بـه‌علاوه، $\mathbf{f}_{\mathrm{p}}^{\mathbf{B}}$ نشان‌دهنده نیروی جلوبرنده است؛ که به‌صورت زیر فرض می‌شود:

---

[1] Mean Aerodynamic Chord

[2] Wing Span

$$\mathbf{f}_{\mathrm{p}}^{\mathbf{B}}=\begin{bmatrix}\mathrm{T}\,\delta_{\mathrm{t}}\\0\\0\end{bmatrix} \qquad (۱۳.۳)$$

در رابطه فوق، T و δ_{t} به‌ترتیب بیانگر برآیند نیروی تراست و تنظیم تراتل هستند. همچنین، δ_{e}، δ_{a} و δ_{r} به‌ترتیب نشان‌دهنده انحراف سطوح کنترلی الویتور[1]، الرون[2] و رادر[3] هستند. به‌علاوه، $\mathbf{m}^{\mathbf{B}}=[\ell\ m\ n]^{\mathrm{T}}$ بردار گشتاور آیرودینامیکی است؛ که به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۷۹]:

$$\mathbf{m}^{\mathbf{B}}=\frac{1}{2}\rho V_{\mathrm{a}}{}^{2}\mathrm{S}\begin{bmatrix}\mathrm{b}\left(C_{\ell_0}+C_{\ell_\beta}\beta+C_{\ell_p}\dfrac{p_{\mathrm{rel}}\mathrm{b}}{2V_{\mathrm{a}}}+C_{\ell_r}\dfrac{r_{\mathrm{rel}}\mathrm{b}}{2V_{\mathrm{a}}}+C_{\ell_{\delta_{\mathrm{a}}}}\delta_{\mathrm{a}}+C_{\ell_{\delta_{\mathrm{r}}}}\delta_{\mathrm{r}}\right)\\ \bar{\mathrm{c}}\left(C_{\mathrm{m}_0}+C_{\mathrm{m}_\alpha}\alpha+C_{\mathrm{m}_q}\dfrac{q_{\mathrm{rel}}\bar{\mathrm{c}}}{2V_{\mathrm{a}}}+C_{\mathrm{m}_{\delta_{\mathrm{e}}}}\delta_{\mathrm{e}}\right)\\ \mathrm{b}\left(C_{\mathrm{n}_0}+C_{\mathrm{n}_\beta}\beta+C_{\mathrm{n}_p}\dfrac{p_{\mathrm{rel}}\mathrm{b}}{2V_{\mathrm{a}}}+C_{\mathrm{n}_r}\dfrac{r_{\mathrm{rel}}\mathrm{b}}{2V_{\mathrm{a}}}+C_{\mathrm{n}_{\delta_{\mathrm{a}}}}\delta_{\mathrm{a}}+C_{\mathrm{n}_{\delta_{\mathrm{r}}}}\delta_{\mathrm{r}}\right)\end{bmatrix} \qquad (۱۴.۳)$$

در رابطه فوق، C_{m_i} به‌ازای $i=0,\alpha,q,\delta_{\mathrm{e}}$ نشان‌دهنده ضرایب گشتاور آیرودینامیکی طولی هستند. همچنین، C_{ℓ_i} و C_{n_i} نیز به‌ازای $i=0,\beta,p,r,\delta_{\mathrm{a}},\delta_{\mathrm{r}}$ نشان‌دهنده ضرایب گشتاور آیرودینامیکی عرضی هستند. به علاوه، $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{a}}^{\mathbf{B}}=[p_{\mathrm{rel}}\ q_{\mathrm{rel}}\ r_{\mathrm{rel}}]^{\mathrm{T}}$ بیانگر سرعت‌زاویه‌ای پرنده نسبت به باد بیان‌شده در سیستم مختصات بدنی است؛ که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{a}}^{\mathbf{B}}=\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{NB}}^{\mathbf{B}}-\mathbf{C}_{\mathbf{N}}^{\mathbf{B}}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{w}}^{\mathbf{N}} \qquad (۱۵.۳)$$

در معادله فوق، $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{w}}^{\mathbf{N}}$ سرعت‌زاویه‌ای باد نسبت به سیستم مختصات NED است؛ که به‌صورت زیر محاسبه می‌شود [۸۱]:

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{w}}^{\mathbf{N}}=\frac{1}{2}\nabla\times\mathbf{v}_{\mathrm{w}}^{\mathbf{N}}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial w_d}{\partial y}-\dfrac{\partial w_e}{\partial z} & \dfrac{\partial w_n}{\partial z}-\dfrac{\partial w_d}{\partial x} & \dfrac{\partial w_e}{\partial x}-\dfrac{\partial w_n}{\partial y}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \qquad (۱۶.۳)$$

[1] Elevator Deflection

[2] Aileron Deflection

[3] Rudder Deflection

لازم به ذکر است که نرخ شبیه‌سازی معادلات پرنده نیز برابر با ۰/۰۱ ثانیه در نظر گرفته شده‌است.

۳.۱.۳ مدل‌سازی حسگرها

اندازه‌گیری‌های پرنده توسط سه ژیروسکوپ نرخی[1]، یک ارتفاع سنج[2]، یک قطب‌نمای دیجیتالی[3] و یک گیرنده سیستم موقعیت‌یاب جهانی (GPS)[4] انجام می‌شوند. این حسگرها در پیوست "الف" معرفی می‌شوند. به‌منظور مدل‌سازی، حسگرها به‌صورت ایده‌آل درنظر گرفته می‌شوند؛ درحالیکه خروجی آن‌ها به نویز اندازه‌گیری آغشته است. بنابراین، خروجی حسگرها به‌صورت زیر مدل‌سازی می‌شوند:

$$\mathbf{z}=\begin{bmatrix} p_{n_{\mathrm{m}}} \\ p_{e_{\mathrm{m}}} \\ h_{\mathrm{m}} \\ \dot{p}_{n_{\mathrm{m}}} \\ \dot{p}_{e_{\mathrm{m}}} \\ \dot{p}_{d_{\mathrm{m}}} \\ p_{\mathrm{m}} \\ q_{\mathrm{m}} \\ r_{\mathrm{m}} \\ \psi_{\mathrm{m}} \end{bmatrix}+\mathbf{v} \tag{۱۷.۳}$$

در رابطه فوق، $h=-p_d$ بیانگر ارتفاع پرنده از سطح زمین و $\mathbf{v}$ بیانگر بردار نویز اندازه‌گیری است.

۴.۱.۳ بیان معادلات غیرخطی حرکت در فضای حالت

در این بخش، مدل دینامیکی تصادفی پرنده در فضای حالت بیان می‌شود. به‌این‌منظور، مدل یقینی بیان‌شده توسط معادلات (۱.۳) تا (۴.۳) به نویز فرآیند آغشته می‌شود. لذا، با تعریف متغیرهای حالت به‌صورت $x_1=p_n$، $x_2=p_e$، $x_3=p_d$، $x_4=u$، $x_5=v$، $x_6=w$، $x_7=\phi$، $x_8=\theta$، $x_9=\psi$، $x_{10}=p$، $x_{11}=q$ و $x_{12}=r$، مدل تصادفی پرنده به‌صورت زیر بیان می‌شود:

---

[1] Rate Gyro

[2] Altimeter

[3] Digital Compass

[4] Global Positioning System

$$
\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{x_8}c_{x_9} & s_{x_7}s_{x_8}c_{x_9}-c_{x_7}s_{x_9} & c_{x_7}s_{x_8}c_{x_9}+s_{x_7}s_{x_9}\\ c_{x_8}s_{x_9} & s_7 s_{x_8}s_{x_9}+c_{x_7}c_{x_9} & c_{x_7}s_{x_8}s_{x_9}-s_{x_7}c_{x_9}\\ -s_{x_8} & s_{x_7}c_{x_8} & c_{x_7}c_{x_8}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_4\\ x_5\\ x_6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{bmatrix} \tag{۱۸.۳}
$$

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix}\dot{x}_4\\ \dot{x}_5\\ \dot{x}_6\end{bmatrix}=&\begin{bmatrix}x_{12}x_5-x_{11}x_6\\ x_{10}x_6-x_{12}x_4\\ x_{11}x_4-x_{10}x_5\end{bmatrix}+g\begin{bmatrix}-s_{x_8}\\ s_{x_7}\,c_{x_8}\\ c_{x_7}\,c_{x_8}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{T}{m}\delta_t\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+\frac{\rho\left[\left(x_4-u_w\right)^2+\left(x_5-v_w\right)^2+\left(x_6-w_w\right)^2\right]S}{2m}\\
&\begin{bmatrix}C_{x_0}+C_{x_\alpha}\tan^{-1}\left(\dfrac{x_6-w_w}{x_4-u_w}\right)+C_{x_{\delta_e}}\delta_e\\ C_{y_0}+C_{y_\beta}\sin^{-1}\left(\dfrac{x_5-v_w}{\sqrt{\left(x_4-u_w\right)^2+\left(x_5-v_w\right)^2+\left(x_6-w_w\right)^2}}\right)+C_{y_{\delta_a}}\delta_a+C_{y_{\delta_r}}\delta_r\\ C_{z_0}+C_{z_\alpha}\tan^{-1}\left(\dfrac{x_6-w_w}{x_4-u_w}\right)+C_{z_{\delta_e}}\delta_e\end{bmatrix}+\frac{\rho S}{4m}\\
&\sqrt{\left(x_4-u_w\right)^2+\left(x_5-v_w\right)^2+\left(x_6-w_w\right)^2}\begin{bmatrix}\left(x_{11}-q_w\right)\bar{c}\,C_{x_q}\\ b\left(C_{y_r}\left(x_{12}-r_w\right)+C_{y_p}\left(x_{10}-p_w\right)\right)\\ \left(x_{11}-q_w\right)\bar{c}\,C_{z_q}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\omega_4\\ \omega_5\\ \omega_6\end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{۱۹.۳}
$$

$$
\begin{bmatrix}\dot{x}_7\\ \dot{x}_8\\ \dot{x}_9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & s_{x_7}\tan_{x_8} & c_{x_7}\tan_{x_8}\\ 0 & c_{x_7} & -s_{x_7}\\ 0 & s_{x_7}\sec_{x_8} & c_{x_7}\sec_{x_8}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{10}\\ x_{11}\\ x_{12}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\omega_7\\ \omega_8\\ \omega_9\end{bmatrix} \tag{۲۰.۳}
$$

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix}\dot{x}_{10}\\ \dot{x}_{11}\\ \dot{x}_{12}\end{bmatrix}=&\begin{bmatrix}\Gamma_1 x_{10}x_{11}-\Gamma_2\,x_{11}x_{12}\\ \Gamma_5\,x_{10}x_{12}-\Gamma_6(x_{10}{}^2-x_{12}{}^2)\\ \Gamma_7\,x_{10}x_{11}-\Gamma_1\,x_{11}x_{12}\end{bmatrix}+\frac{\rho\left[\left(x_4-u_w\right)^2+\left(x_5-v_w\right)^2+\left(x_6-w_w\right)^2\right]S}{2}\\
&\begin{bmatrix}b\left(C_{p_0}+C_{p_{\delta_a}}\delta_a+C_{p_{\delta_r}}\delta_r+C_{p_\beta}\sin^{-1}\left(\dfrac{x_5-v_w}{\sqrt{\left(x_4-u_w\right)^2+\left(x_5-v_w\right)^2+\left(x_6-w_w\right)^2}}\right)\right)\\ \dfrac{\bar{c}}{J_{yy}}\left(C_{m_0}+C_{m_\alpha}\tan^{-1}\left(\dfrac{x_6-w_w}{x_4-u_w}\right)+C_{m_{\delta_e}}\delta_e\right)\\ b\left(C_{r_0}+C_{r_{\delta_a}}\delta_a+C_{r_{\delta_r}}\delta_r+C_{r_\beta}\sin^{-1}\left(\dfrac{x_5-v_w}{\sqrt{\left(x_4-u_w\right)^2+\left(x_5-v_w\right)^2+\left(x_6-w_w\right)^2_a}}\right)\right)\end{bmatrix}\\
&+\frac{\rho S\sqrt{\left(x_4-u_w\right)^2+\left(x_5-v_w\right)^2+\left(x_6-w_w\right)^2}}{4}\begin{bmatrix}b^2\left(C_{p_p}\left(x_{10}-p_w\right)+C_{p_r}\left(x_{12}-r_w\right)\right)\\ \dfrac{\left(x_{11}-q_w\right)\bar{c}^2}{J_{yy}}C_{m_q}\\ b^2\left(C_{r_p}\left(x_{10}-p_w\right)+C_{r_r}\left(x_{12}-r_w\right)\right)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\omega_{10}\\ \omega_{11}\\ \omega_{12}\end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{۲۱.۳}
$$

در روابط فوق، $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{w}}^{\mathbf{B}}=[p_w \;\; q_w \;\; r_w]^{\mathrm{T}}$ و $\mathbf{v}_{\mathrm{w}}^{\mathbf{B}}=[u_{\mathrm{w}} \;\; v_{\mathrm{w}} \;\; w_{\mathrm{w}}]^{\mathrm{T}}$ به‌ترتیب بیانگر سرعت‌های خطی و زاویه‌ای باد بیان‌شده در سیستم مختصات بدنی هستند. همچنین، ω_i به‌ازای i=1,…,12 نشان‌دهنده نویز فرآیند است؛ که به‌صورت نویز سفید مدل می‌شود. به علاوه، $C_{p_i}=\Gamma_3 C_{\ell_i}+\Gamma_4 C_{\mathrm{n}_i}$ و $C_{r_i}=\Gamma_4 C_{\ell_i}+\Gamma_8 C_{\mathrm{n}_i}$ به‌ازای $i=0, \beta, p, r, \delta_{\mathrm{a}}, \delta_{\mathrm{r}}$ هستند. همچنین، Γ_i به‌ازای i=1,…,8 به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&\Gamma_1=\frac{\mathrm{J_{xz}}(\mathrm{J_{xx}}-\mathrm{J_{yy}}+\mathrm{J_{zz}})}{\Gamma};\Gamma_2=\frac{\mathrm{J_{zz}}(\mathrm{J_{zz}}-\mathrm{J_{yy}})+\mathrm{J_{xz}^2}}{\Gamma};\\
&\Gamma_3=\frac{\mathrm{J_{zz}}}{\Gamma};\Gamma_4=\frac{\mathrm{J_{xz}}}{\Gamma};\Gamma_5=\frac{\mathrm{J_{zz}}-\mathrm{J_{xx}}}{\mathrm{J_{yy}}};\\
&\Gamma_6=\frac{\mathrm{J_{xz}}}{\mathrm{J_{yy}}};\Gamma_7=\frac{\mathrm{J_{xx}}(\mathrm{J_{xx}}-\mathrm{J_{yy}})+\mathrm{J_{xz}^2}}{\Gamma};\Gamma_8=\frac{\mathrm{J_{xx}}}{\Gamma}
\end{aligned}
\tag{۲۲.۳}
$$

در روابط فوق، $\Gamma=\mathrm{J_{xx}J_{zz}}-\mathrm{J_{xz}}^2$ است. همچنین، مدل اندازه‌گیری تصادفی در فضای حالت می‌تواند به‌صورت زیر بیان شود:

$$
\mathbf{z}=\begin{bmatrix} p_{n_{\mathrm{m}}}\\ p_{e_{\mathrm{m}}}\\ h_{\mathrm{m}}\\ \dot{p}_{n_{\mathrm{m}}}\\ \dot{p}_{e_{\mathrm{m}}}\\ \dot{p}_{d_{\mathrm{m}}}\\ p_{\mathrm{m}}\\ q_{\mathrm{m}}\\ r_{\mathrm{m}}\\ \psi_{\mathrm{m}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1+v_1\\ x_2+v_2\\ -x_3+v_3\\ (\mathrm{c}_{x_8}\mathrm{c}_{x_9})x_4+(\mathrm{s}_{x_7}\mathrm{s}_{x_8}\mathrm{c}_{x_9}-\mathrm{c}_{x_7}\mathrm{s}_{x_9})x_5+(\mathrm{c}_{x_7}\mathrm{s}_{x_8}\mathrm{c}_{x_9}+\mathrm{s}_{x_7}\mathrm{s}_{x_9})x_6+v_4\\ (\mathrm{c}_{x_8}\mathrm{s}_{x_9})x_4+(\mathrm{s}_7\mathrm{s}_{x_8}\mathrm{s}_{x_9}+\mathrm{c}_{x_7}\mathrm{c}_{x_9})x_5+(\mathrm{c}_{x_7}\mathrm{s}_{x_8}\mathrm{s}_{x_9}-\mathrm{s}_{x_7}\mathrm{c}_{x_9})x_6+v_5\\ -\mathrm{s}_{x_8}x_4+(\mathrm{s}_{x_7}\mathrm{c}_{x_8})x_5+(\mathrm{c}_{x_7}\mathrm{c}_{x_8})x_6+v_6\\ x_{10}+v_7\\ x_{11}+v_8\\ x_{12}+v_9\\ x_9+v_{10} \end{bmatrix}
\tag{۲۳.۳}
$$

در رابطه فوق، v_i به‌ازای i=1,…,10 بیانگر نویز اندازه‌گیری است؛ که به‌صورت نویز سفید با میانگین صفر و کواریانس مشخص مدل می‌شود.

۵.۱.۳ معادلات خطی پرنده

مدل خطی پیوسته زمان فضای حالت پرنده بدون سرنشین بال‌ثابت از خطی‌سازی معادلات (۱.۳) تا (۴.۳) حول شرایط تریم به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_{\text{lon}} \\ \dot{\mathbf{x}}_{\text{lat}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\text{lon}} & \mathbf{A}_{\text{lon-lat}} \\ \mathbf{A}_{\text{lat-lon}} & \mathbf{A}_{\text{lat}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\text{lon}} \\ \mathbf{x}_{\text{lat}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\text{lon}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{\text{lat}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_{\text{lon}} \\ \boldsymbol{\delta}_{\text{lat}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\mathbf{d}_{\text{lon}}} & \mathbf{B}_{\mathbf{d}_{\text{lon-lat}}} \\ \mathbf{B}_{\mathbf{d}_{\text{lat-lon}}} & \mathbf{B}_{\mathbf{d}_{\text{lat}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{\text{lon}} \\ \mathbf{d}_{\text{lat}} \end{bmatrix} \quad (۲۴.۳)$$

در معادله فوق، $\mathbf{x}_{\text{lon}} = \begin{bmatrix} u & w & q & \theta & h & p_n \end{bmatrix}^{\text{T}}$، $\boldsymbol{\delta}_{\text{lon}} = [\delta_{\text{e}} \quad \delta_{\text{t}}]^{\text{T}}$ و $\mathbf{d}_{\text{lon}} = \begin{bmatrix} u_{\text{w}} & w_{\text{w}} \end{bmatrix}^{\text{T}}$ به‌ترتیب بیانگر بردار متغیرهای حالت، بردار متغیرهای ورودی و بردار ورودی‌های نامعلوم مرتبط با کانال طولی و بیان‌شده در سیستم مختصات بدنی هستند. همچنین، $\mathbf{x}_{\text{lat}} = \begin{bmatrix} v & p & r & \phi & \psi & p_e \end{bmatrix}^{\text{T}}$، $\boldsymbol{\delta}_{\text{lat}} = [\delta_{\text{a}} \quad \delta_{\text{r}}]^{\text{T}}$ و $\mathbf{d}_{\text{lat}} = v_{\text{w}}$ به‌ترتیب نشان‌دهنده بردار متغیرهای حالت، بردار متغیرهای ورودی و بردار ورودی‌های نامعلوم مرتبط با کانال عرضی و بیان‌شده در سیستم مختصات بدنی هستند. ماتریس‌های سیستم برای هر دو حرکت طولی و عرضی به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\mathbf{A}_{\text{lon}} = \begin{bmatrix} \text{X}_u & \text{X}_w & \text{X}_q & \text{X}_\theta & 0 & 0 \\ \text{Z}_u & \text{Z}_w & \text{Z}_q & \text{Z}_\theta & 0 & 0 \\ \text{M}_u & \text{M}_w & \text{M}_q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_q & 0 & 0 & 0 \\ \text{H}_u & \text{H}_w & 0 & \text{H}_\theta & 0 & 0 \\ \text{P}_{n_u} & \text{P}_{n_w} & 0 & \text{P}_{\text{n}_\theta} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۲۵.۳)$$

$$\mathbf{A}_{\text{lat}} = \begin{bmatrix} \text{Y}_v & \text{Y}_p & \text{Y}_r & \text{Y}_\phi & 0 & 0 \\ \text{L}_v & \text{L}_p & \text{L}_r & 0 & 0 & 0 \\ \text{N}_v & \text{N}_p & \text{N}_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \Phi_r & \Phi_\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_r & \Psi_\phi & 0 & 0 \\ \text{P}_{e_v} & 0 & 0 & \text{P}_{\text{e}_\phi} & \text{P}_{e_\psi} & 0 \end{bmatrix} \quad (۲۶.۳)$$

$$\mathbf{A}_{\text{lon-lat}}=\begin{bmatrix} \mathrm{X}_v & 0 & \mathrm{X}_r & 0 & 0 & 0\\ \mathrm{Z}_v & \mathrm{Z}_p & 0 & \mathrm{Z}_\phi & 0 & 0\\ \mathrm{M}_v & \mathrm{M}_p & \mathrm{M}_\mathrm{r} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \Theta_r & \Theta_\phi & 0 & 0\\ \mathrm{H}_v & 0 & 0 & \mathrm{H}_\phi & 0 & 0\\ \mathrm{P}_{n_v} & 0 & 0 & \mathrm{P}_{n_\phi} & \mathrm{P}_{n_\psi} & 0 \end{bmatrix} \tag{۲۷.۳}$$

$$\mathbf{A}_{\text{lat-lon}}=\begin{bmatrix} \mathrm{Y}_u & \mathrm{Y}_w & 0 & \mathrm{Y}_\theta & 0 & 0\\ \mathrm{L}_u & \mathrm{L}_w & \mathrm{L}_q & 0 & 0 & 0\\ \mathrm{N}_u & \mathrm{N}_w & \mathrm{N}_q & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \Phi_q & \Phi_\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & \Psi_q & \Psi_\theta & 0 & 0\\ \mathrm{P}_{e_u} & \mathrm{P}_{e_w} & 0 & \mathrm{P}_{e_\theta} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{۲۸.۳}$$

به‌علاوه، ماتریس‌های ورودی به‌صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$\mathbf{B}_{\text{lon}}=\begin{bmatrix} \mathrm{X}_{\delta_\mathrm{e}} & \mathrm{X}_{\delta_\mathrm{t}}\\ \mathrm{Z}_{\delta_\mathrm{e}} & 0\\ \mathrm{M}_{\delta_\mathrm{e}} & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0 \end{bmatrix};\mathbf{B}_{\text{lat}}=\begin{bmatrix} \mathrm{Y}_{\delta_\mathrm{a}} & \mathrm{Y}_{\delta_\mathrm{r}}\\ \mathrm{L}_{\delta_\mathrm{a}} & \mathrm{L}_{\delta_\mathrm{r}}\\ \mathrm{N}_{\delta_\mathrm{a}} & \mathrm{N}_{\delta_\mathrm{r}}\\ 0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{۲۹.۳}$$

و ماتریس‌های ورودی‌های نامعلوم به‌صورت زیر نتیجه می‌شوند:

$$\mathbf{B}_{\mathbf{d}_{\text{lon}}}=\begin{bmatrix} -\mathrm{X}_u & -\left(\mathrm{X}_w+q\right)\\ -\left(\mathrm{Z}_u-q\right) & -\mathrm{Z}_w\\ -\mathrm{M}_u & -\mathrm{M}_w\\ 0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0 \end{bmatrix};\mathbf{B}_{\mathbf{d}_{\text{lat}}}=\begin{bmatrix} -\mathrm{Y}_v\\ -\mathrm{L}_v\\ -\mathrm{N}_v\\ 0\\ 0\\ 0 \end{bmatrix} \tag{۳۰.۳}$$

$$\mathbf{B}_{\mathbf{d}_{\text{lon-lat}}}=\begin{bmatrix}-\left(\mathrm{X}_v-r\right)\\-\left(\mathrm{Z}_v+p\right)\\-\mathrm{M}_v\\0\\0\\0\end{bmatrix};\mathbf{B}_{\mathbf{d}_{\text{lat-lon}}}=\begin{bmatrix}-\left(\mathrm{Y}_u+r\right)&-\left(\mathrm{Y}_w-p\right)\\-\mathrm{L}_u&-\mathrm{L}_w\\-\mathrm{N}_u&-\mathrm{N}_w\\0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix} \tag{۳۱.۳}$$

در روابط فوق، X_i، Y_i، Z_i، L_i، M_i، N_i، Φ_i، Θ_i، Ψ_i، $\mathrm{P}_{\mathrm{n}_i}$، $\mathrm{P}_{\mathrm{e}_i}$ و H_i به‌ازای $i=u, v, w, p, q, r, \phi, \theta, \psi, \delta_\mathrm{e}, \delta_\mathrm{t}, \delta_a, \delta_\mathrm{r}$ نشان‌دهنده مشتقات آیرودینامیک و کنترل هستند؛ که به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{cases}\mathrm{X}_i=\dfrac{\partial\dot{u}}{\partial i};\mathrm{Y}_i=\dfrac{\partial\dot{v}}{\partial i};\mathrm{Z}_i=\dfrac{\partial\dot{w}}{\partial i}\\ \mathrm{L}_i=\dfrac{\partial\dot{p}}{\partial i};\mathrm{M}_i=\dfrac{\partial\dot{q}}{\partial i};\mathrm{N}_i=\dfrac{\partial\dot{r}}{\partial i}\\ \Phi_i=\dfrac{\partial\dot{\phi}}{\partial i};\Theta_i=\dfrac{\partial\dot{\theta}}{\partial i};\Psi_i=\dfrac{\partial\dot{\psi}}{\partial i}\\ \mathrm{P}_{\mathrm{n}_i}=\dfrac{\partial\dot{p}_n}{\partial i};\mathrm{P}_{\mathrm{e}_i}=\dfrac{\partial\dot{p}_e}{\partial i};\mathrm{H}_i=\dfrac{\partial\dot{h}}{\partial i}\end{cases} \tag{۳۲.۳}$$

مشتقات آیرودینامیک و کنترل کانال‌های طولی و عرضی به‌ترتیب در جداول پ-۱ و پ-۲، که در پیوست "ب" موجود است، تعریف شده‌است. همچنین، شرایط پروازی و پارامترهای پرنده در پیوست "پ" بیان شده‌است. در نهایت، ماتریس خروجی‌های خطی‌سازی‌شده پرنده نیز به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\mathbf{z}=\left[p_n\quad p_e\quad h\quad u\quad v\quad w\quad p\quad q\quad r\quad \psi\right]^\mathrm{T} \tag{۳۳.۳}$$

با درنظرگرفتن $\mathbf{A}_{\text{lon-lat}}=\mathbf{A}_{\text{lat-lon}}=\mathbf{0}$، معادلات دکوپله کانال طولی و عرضی بدست می‌آید. در این‌صورت، معادلات حاکم بر حرکت کانال طولی به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\dot{u}=\mathrm{X}_u(u-u_\mathrm{w})+\mathrm{X}_w(w-w_\mathrm{w})+\mathrm{X}_q\,q+\mathrm{X}_\theta\,\theta+\mathrm{X}_{\delta_e}\,\delta_e+\mathrm{X}_{\delta_\mathrm{t}}\,\delta_\mathrm{t} \tag{۳۴.۳}$$

$$\dot{w}=\mathrm{Z}_u(u-u_\mathrm{w})+\mathrm{Z}_w(w-w_\mathrm{w})+\mathrm{Z}_q\,q+\mathrm{Z}_\theta\,\theta+\mathrm{Z}_{\delta_e}\,\delta_e+\mathrm{Z}_{\delta_\mathrm{t}}\,\delta_\mathrm{t} \tag{۳۵.۳}$$

$$\dot{q}=\mathrm{M}_u(u-u_\mathrm{w})+\mathrm{M}_w(w-w_\mathrm{w})+\mathrm{M}_q\,q+\mathrm{M}_{\delta_e}\,\delta_e+\mathrm{M}_{\delta_\mathrm{t}}\,\delta_\mathrm{t} \tag{۳۶.۳}$$

$$\dot{\theta} = \theta_{\theta} q \tag{۳۷.۳}$$

$$\dot{h} = \mathrm{H}_u\, u + \mathrm{H}_w\, w + \mathrm{H}_{\theta}\, \theta \tag{۳۸.۳}$$

$$\dot{\mathrm{P}}_{\mathrm{n}} = \mathrm{P}_{\mathrm{n}_u}\, u + \mathrm{P}_{\mathrm{n}_w}\, w + \mathrm{P}_{\mathrm{n}_{\theta}}\, \theta \tag{۳۹.۳}$$

همچنین، معادلات حاکم بر حرکت کانال عرضی به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\dot{v} = \mathrm{Y}_v\,(v - v_{\mathrm{w}}) + \mathrm{Y}_p\, p + \mathrm{Y}_r\, r + \mathrm{Y}_{\phi}\, \phi + \mathrm{Y}_{\delta_{\mathrm{a}}}\, \delta_{\mathrm{a}} + \mathrm{Y}_{\delta_r}\, \delta_{\mathrm{r}} \tag{۴۰.۳}$$

$$\dot{p} = \mathrm{L}_u\,(v - v_{\mathrm{w}}) + \mathrm{L}_p\, p + \mathrm{L}_r\, r + \mathrm{L}_{\delta_{\mathrm{a}}}\, \delta_{\mathrm{a}} + \mathrm{L}_{\delta_r}\, \delta_{\mathrm{r}} \tag{۴۱.۳}$$

$$\dot{r} = \mathrm{N}_v\,(v - v_{\mathrm{w}}) + \mathrm{N}_p\, p + \mathrm{N}_r\, r + \mathrm{N}_{\delta_{\mathrm{a}}}\, \delta_{\mathrm{a}} + \mathrm{N}_{\delta_r}\, \delta_{\mathrm{r}} \tag{۴۲.۳}$$

$$\dot{\phi} = p + \Phi_r\, r + \Phi_{\phi}\, \phi \tag{۴۳.۳}$$

$$\dot{\psi} = \Psi_r\, r + \Psi_{\phi}\, \phi \tag{۴۴.۳}$$

$$\dot{\mathrm{P}}_{\mathrm{e}} = \mathrm{P}_{\mathrm{e}_v}\, v + \mathrm{P}_{\mathrm{e}_{\phi}}\, \phi + \mathrm{P}_{\mathrm{e}\psi}\, \psi \tag{۴۵.۳}$$

۲.۳ مدل‌سازی پدیده باد

مدل‌سازی اغتشاشات اتمسفری نقش مهمی را در کنترل پرنده بدون سرنشین ایفا می‌کند. در این بخش، مدل اغتشاشات اتمسفری به‌صورت زیر درنظر گرفته‌می‌شود:

$$\mathbf{v}_{\mathrm{w}} = \mathbf{v}_{\mathrm{w_d}} + \mathbf{v}_{\mathrm{w_s}} \tag{۴۶.۳}$$

در رابطه فوق، $\mathbf{v}_{\mathrm{w_d}}$ و $\mathbf{v}_{\mathrm{w_s}}$ به‌ترتیب بیانگر مدل‌های باد معین و تصادفی هستند. در ادامه، مدل‌های باد به‌صورت جزئی بیان می‌شوند.

۱.۲.۳ مدل‌سازی باد معین

مولفه‌های باد معین عمدتاً در سیستم مختصات NED به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

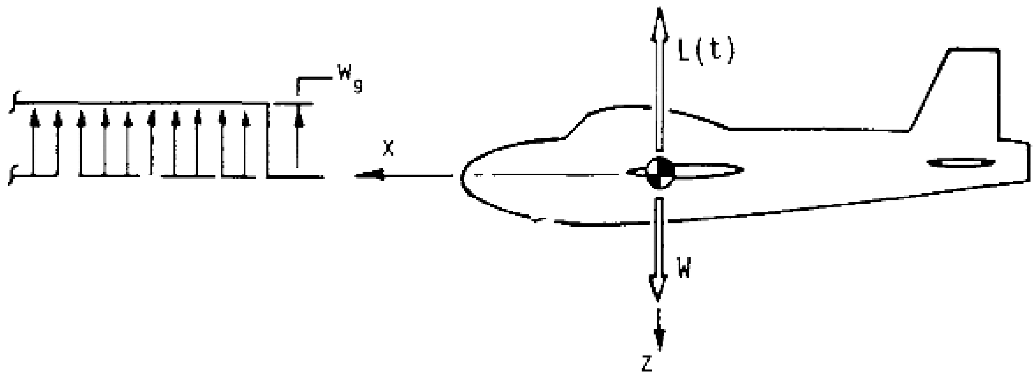
$$\mathbf{v}_{\mathrm{w_d}}^{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} w_{n_{\mathrm{d}}} & w_{e_{\mathrm{d}}} & w_{d_{\mathrm{d}}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{۴۷.۳}$$

در رابطه فوق، w_{n_d}، w_{e_d} و w_{d_d} به‌ترتیب بیانگر مولفه‌های باد معین در جهات شمال، شرق و جنوب هستند. در ادامه، مدل بادهای معین شامل مدل باد ثابت (بخش ۱.۱.۲.۳)، مدل باد "1-cosine" (بخش ۲.۱.۲.۳)، مدل باد برشی (بخش ۳.۱.۲.۳) و مدل مایکروبرست (بخش ۴.۱.۲.۳) با توجه به مدل‌های موجود در مقالات تشریح می‌شوند.

۱.۱.۲.۳ مدل‌سازی باد ثابت

باد ثابت با مشخصه‌هایی مانند سرعت و جهت در سیستم مختصات زمینی بیان می‌شوند. جهت باد بیانگر جهت وزش باد است. به منظور مدل‌سازی بادهای ثابت، میزان سرعت و جهت باد ثابت فرض می‌شود. در ادامه، نمونه‌ای از بادهای ثابت هم‌چون تندباد لبه تیز، باد روبه‌رو، باد از پشت و باد جانبی بررسی می‌شوند.

تندباد لبه تیز: در صورتیکه پرنده با یک تندباد لبه تیز[1] [۸۲] یا گاست پله[2] [۸۳] ایده‌آل مطابق با شکل ۳.۳ مواجه شود؛ آنگاه فرض می‌شود که پاسخ دینامیکی پرنده تنها در جهت عمودی تغییر می‌کند و حرکت پیچ پرنده ناچیز است. پروفیل سرعت تندباد لبه تیز ایده‌آل به‌ندرت در طبیعت رخ می‌دهد. در مرجع [۸۳] مقدار سرعت باد در حدود $50 \mathrm{ft}/\mathrm{sec}$ درنظر گرفته شده‌است.



شکل ۳.۳ مواجه پرنده با تندباد لبه تیز ایده‌آل [۸۳].

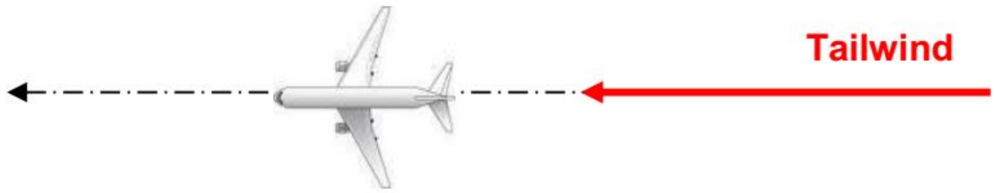
[1] Sharp-edged gust

[2] Step Gust

باد از جلو: در صورتیکه پرنده تنها با باد ثابت روبه‌رو مطابق با شکل ۴.۳ مواجه شود؛ آنگاه مسیر پروازی پرنده مخالف جهت وزش باد است. در این صورت، وزش این نوع باد باعث عملکرد مناسب در فازهای فرود و برخاست پرنده می‌شود.

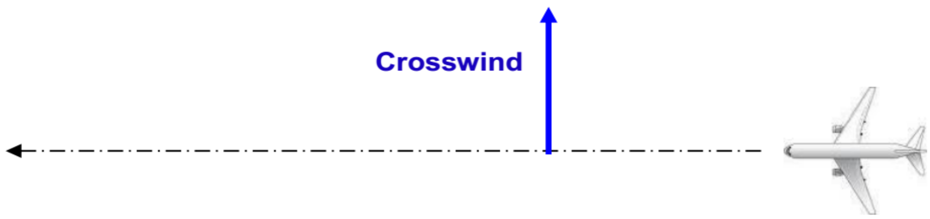
شکل ۴.۳ مواجه پرنده با باد ثابت خالص روبه‌رو

باد از پشت: در صورتیکه پرنده تنها با باد ثابت از پشت مطابق با شکل ۵.۳ مواجه شود؛ آنگاه پرنده در همان جهت وزش باد حرکت می‌کند. در این صورت، وزش این نوع باد باعث عملکرد مناسب در طول مسیر پرواز پرنده به‌دلیل کمینه‌کردن زمان پروازی می‌شود.

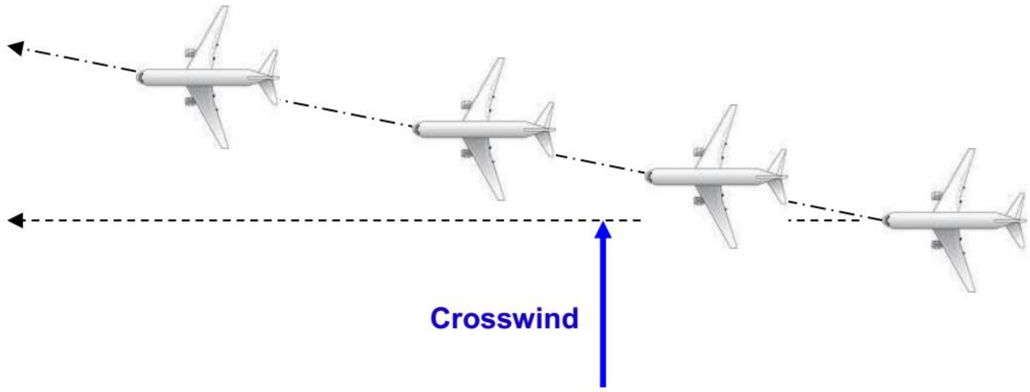


شکل ۵.۳ مواجه پرنده با باد ثابت خالص از پشت

باد جانبی: در صورتیکه پرنده تنها با باد جانبی مطابق با شکل ۶.۳ مواجه شود؛ آنگاه جهت وزش باد عمود بر جهت مسیر پروازی پرنده است. در این صورت، وزش این نوع باد باعث انحراف پرنده از مسیر مطلوب مطابق با شکل ۷.۳ پرنده می‌شود. باد جانبی می‌تواند از چپ به راست (مطابق با شکل ۶.۳) یا از راست به چپ بوزد. وزش باد جانبی در فازهای پروازی فرود و برخاست خطرناک است و باعث افزایش میزان نیاز به انحراف سطوح کنترلی رادر و الرون به‌منظور بالانس پرنده می‌شود. سطوح مختلف شدت باد جانبی اعمالی به پرنده در جدول ۱.۳ نشان داده شده‌است.



شکل ۶.۳ مواجه پرنده با باد ثابت خالص جانبی



شکل ۷.۳ انحراف پرنده از مسیر مطلوب در صورت وزش باد جانبی

جدول ۱.۳ شدت باد جانبی [۸۴].

شدت	مقدار (نات)	مقدار (فوت بر ثانیه)
کم	۱۰-۰	۱۸-۰
متوسط	۳۰-۱۱	۵۰-۱۸
شدید	۴۵-۳۱	۷۵-۵۰

۲.۱.۲.۳ مدل‌سازی باد "1-cosine"

بر مبنای استاندارد MIL-HDBK-1797B [۸۵]، مدل استاندارد "1-cosine" در شکل ۸.۳ نشان داده شده‌است. باد "1-cosine" ایده‌آل یک ساختار باد شامل یک پالس "1-cosine" مطابق با شکل ۹.۳ است. از این الگوی باد می‌توان به‌منظور ارزیابی پاسخ پرنده در برابر اغتشاشات بزرگ استفاده کرد [۸۶]. مدل ریاضی سرعت باد "1-cosine" به‌صورت زیر بیان می‌شود [۸۷]:

$$w_{\text{1-cosine}} = \begin{cases} \frac{\mathrm{v_m}}{2}\left(1-\cos\left(\frac{2\pi x_{\mathrm{g}}}{\mathrm{d_m}}\right)\right) & \text{if } \; 0 < x_{\mathrm{g}} < \mathrm{d_m} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (۴۸.۳)$$

در رابطه فوق، $\mathrm{v_m}$ و $\mathrm{d_m}$ به‌ترتیب بیانگر اندازه و طول موج باد[1] در جهت مورد نظر هستند. همچنین، x_{g} بیانگر فاصله طی‌شده است. لازم به ذکر است که $\frac{\mathrm{d_m}}{2}$ را فاصله گرادیانی[1] می‌نامند. نمونه‌ای از اندازه باد

[1] Gust Length

($\mathrm{v_m}$) در جهت محور z سیستم مختصات بدنی در جدول ۲.۳ نشان داده شده‌است. همچنین، طول موج باد ($\mathrm{d_m}$) از دیدگاه سازه‌ای در بدترین حالت تقریباً ۲۵ برابر وتر میانگین هندسی بال ($\mathrm{d_m} = 25\bar{\mathrm{c}}$) درنظر گرفته می‌شود [۸۸].

به‌منظور محاسبه پاسخ پرنده، لازم است تا سرعت باد در حوزه زمان محاسبه شود. در این‌صورت، هنگامی که پرنده دارای سرعت ثابت V باشد؛ آنگاه بال پرنده با باد "1-cosine" در موقعیت $x_g = Vt$ مواجه می‌شود. بنابراین، پاسخ زمانی باد "1-cosine" به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$w_{\text{1-cosine}}(t) = \begin{Bmatrix} \frac{\mathrm{v_m}}{2}\left(1-\cos\left(\frac{2\pi V}{\mathrm{d_m}}t\right)\right) & \text{if} \;\; 0 < x_{\mathrm{g}} < \mathrm{d_m} \\ 0 & \text{otherwise} \end{Bmatrix} \qquad (۴۹.۳)$$

در رابطه فوق، V بیانگر سرعت حقیقی هوا (TAS)[۲] است. همچنین، لازم به ذکر است که مولفه‌های سرعت باد در سیستم مختصات بدنی بر مبنای ماتریس انتقال به سیستم مختصات NED منتقل می‌شوند.

۳.۱.۲.۳ مدل‌سازی باد برشی

سرعت و جهت میانگین باد نسبت به زمین همواره در امتداد مسیر پروازی ثابت نیست. تغییرات میانگین باد در امتداد مسیر پرواز به‌صورت باد برشی شناخته می‌شوند. به‌عبارت دیگر، باد برشی از مجموع بادهای انتقالی، دورانی صلب و تغییر شکل‌یافته خالص مطابق با شکل ۱۰.۳ حاصل می‌شود. تاثیر باد برشی بر حرکت پرنده به‌خصوص در طول فازهای پروازی فرود و برخاست و نیز هنگامی که اندازه باد نسبتاً بزرگ باشد، دارای اهمیت است. سرعت باد برشی به‌صورت معکوس متناسب با ارتفاع است. در نتیجه، با افزایش ارتفاع، سرعت باد برشی کاهش می‌یابد [۹۱]. پروفیل سرعت باد برشی با توجه به مدل استاندارد سازمان هوانوردی غیرنظامی بین‌المللی (ICAO)[۳] به‌صورت زیر است [۸۷]:

---

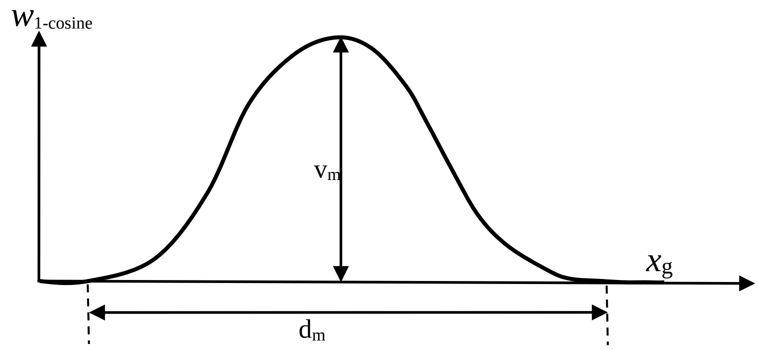
[1] Gradiant Distance

[2] True Air Speed

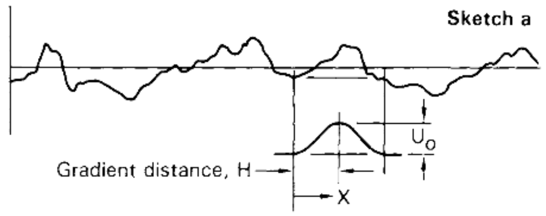
[3] International Civil Aviation Organization

$$w_{n_{\text{wind shear}}} = \begin{cases} w_{9.15} \dfrac{(h^{0.2545} - 0.4097)}{1.3470} & 0 < h < 300\,\text{m} \\ 2.86585\ w_{9.15} & h \geq 300\,\text{m} \end{cases} \qquad (۵۰.۳)$$

در رابطه فوق، $w_{9.15}$ بیانگر سرعت باد در ارتفاع ۹/۱۵ متر است. همچنین، با درنظرگرفتن تاثیرات لایـه مرزی جو، سرعت میانگین باد برشی در ارتفاعات پایین و در امتداد محور طولی قاب NED، هنگامی‌کـه باد از جهت شمال می‌وزد، بر مبنای استاندارد MIL-F-8785C [۸۶] به‌صورت زیر درنظر گرفته می‌شود [۸۷]:



شکل ۸.۳ پروفیل سرعت باد "1-cosine"



شکل ۹.۳ ساختار ایده‌آل باد شامل باد "1-cosine" [۸۹]

جدول ۲.۳ اندازه سرعت باد "1-cosine" [۹۰].

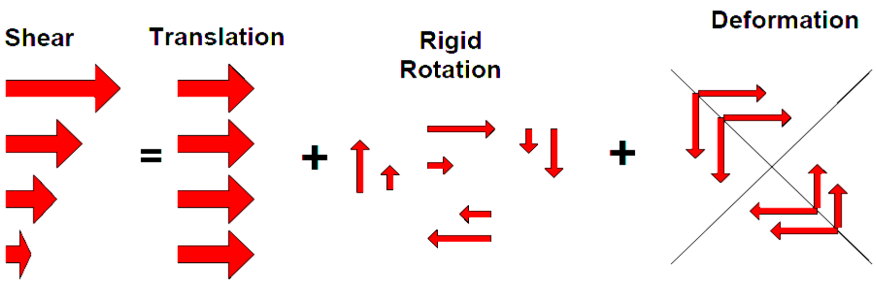
فاز پروازی	اندازه سرعت باد (فوت بر ثانیه)	
	ارتفاع از سطح دریا تا ۲۰,۰۰۰ فوت	ارتفاع ۵۰,۰۰۰ فوت
کروز	۵۰	۲۵
نزول	۲۵	۱۲/۵

$$w_{n_{\text{wind shear}}} = w_{20}\frac{\ln(\frac{h}{z_0})}{\ln(\frac{20}{z_0})} \qquad 3\text{ft} < h < 1000\,\text{ft} \tag{۵۱.۳}$$

در رابطه فوق، $h=-p_d$ بیانگر ارتفاع پرنده و w_{20} بیانگر سرعت باد اندازه‌گیری‌شده در ارتفاع ۲۰ فوت (۶ متری) است. همچنین، z_0 معادل ۰/۱۵ فوت برای فاز پروازی C و ۲ فوت برای سایر فازهای پروازی است. فاز پروازی C بیانگر فاز مراحل برخاست و نهایی شامل تقرب و فرود است [۹۲]. در صورتیکه جهت بردار باد نسبت به شمال با ψ_{wind} نشان داده شود؛ آنگاه مولفه‌های باد برشی در قاب NED به‌صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$w_{n_{\text{wind shear}}} = w_{20}\frac{\ln(\frac{h}{z_0})}{\ln(\frac{20}{z_0})}\cos(\psi_{\text{wind}}) \tag{۵۲.۳}$$

$$w_{e_{\text{wind shear}}} = w_{20}\frac{\ln(\frac{h}{z_0})}{\ln(\frac{20}{z_0})_g}\sin(\psi_{\text{wind}}) \tag{۵۳.۳}$$

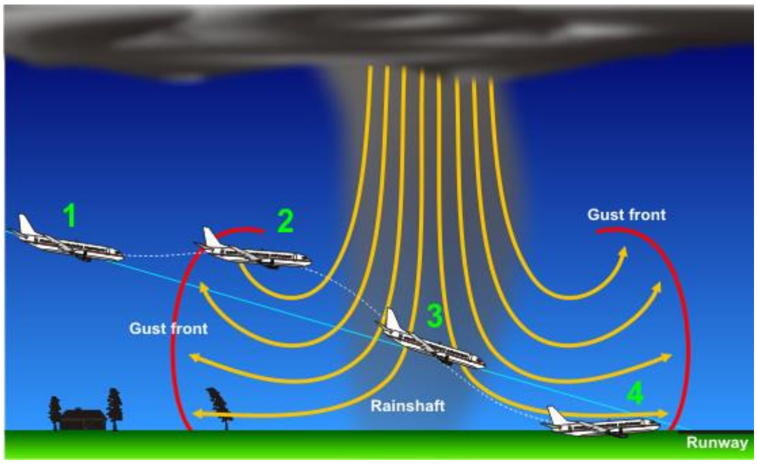


شکل ۱۰.۳ چگونگی ایجاد باد برشی.

۴.۱.۲.۳ مدل‌سازی مایکروبرست

مایکروبرست نوع شدیدی از باد برشی است. این نوع باد زمانی ایجاد می‌شود که بادهای رو به‌جلو با شدت زیاد در مدت زمان کوتاهی به بادهای از پشت با شدت زیاد تبدیل می‌شوند [۸۷]. بنابراین یک پرنده عبوری از مایکروبرست مطابق با شکل ۱۱.۳ می‌تواند بادهای برشی شدیدی را تجربه کند. همانطور

که مشاهده می‌شود، پرنده ابتدا در هنگام ورود به مایکروبرست با باد روبه جلو مواجه می‌شود. این باد باعث افزایش سرعت هوا پرنده و/یا انحراف پرنده از مسیر پروازی مطلوب می‌شود. سپس، خلبان با کاهش تراست و زاویه پیچ پرنده تمایل به بازگرداندن پرنده به مسیر پروازی مطلوب را دارد. در نتیجه، انرژی جنبشی پرنده کاهش می‌یابد. پس از آنکه پرنده به‌طور ناگهانی با هسته مایکروبرست مواجه می‌شود؛ آنگاه با کاهش شدید سرعت رو به‌جلو و انتقال به سرعت از پشت مواجه می‌شود. در نتیجه، یک جریان روبه پایین قوی ایجاد می‌شود.



شکل ۱۱.۳ مواجه پرنده با مایکروبرست.

در این رساله، از مدل مایکروبرست Vicroy [۹۳]، که توسط ناسا ایجاد شده‌است، به‌عنوان یک مدل تجربی متقارن بر مبنای قانون بقای جرم جریان و همچنین، با درنظرگرفتن لایه مرزی استفاده می‌شود. این مدل انطباق خوبی با داده‌های واقعی مایکروبرست دارد [۹۴]. همچنین، این مدل تحلیلی یک تصحیحی از مدل پایین‌رونده Oseguera/Bowles [۹۴] است و مایکروبرست در مرکز سیستم مختصات مطابق با شکل ۱۲.۳ قرار گرفته‌است. بر اساس این مدل، مولفه‌های سرعت‌های باد در مایکروبرست در نقطه P به‌صورت زیر بیان می‌شوند [۹۴]:

$$w_{x_{mb}} = \frac{\lambda x}{2}\left[\exp(c_1 \frac{h}{h_{max}}) - \exp(c_2 \frac{h}{h_{max}})\right] \exp\left[\frac{2-\left(x^2+y^2\right)^{\alpha_{mb}} / r_{max}^{2\alpha_{mb}}}{2\alpha_{mb}}\right] \quad (۵۴.۳)$$

$$w_{y_{mb}} = \frac{\lambda y}{2}\left[\exp(c_1 \frac{h}{h_{max}}) - \exp(c_2 \frac{h}{h_{max}})\right] \exp\left[\frac{2-\left(x^2+y^2\right)^{\alpha_{mb}} / r_{max}^{2\alpha_{mb}}}{2\alpha_{mb}}\right] \quad (۵۵.۳)$$

$$w_{h_{\mathrm{mb}}} = -\lambda\left\{\frac{\mathrm{h}_{\max}}{\mathrm{c}_1}\left[\exp(\mathrm{c}_1\frac{h}{\mathrm{h}_{\max}})-1\right]-\frac{\mathrm{h}_{\max}}{\mathrm{c}_2}\left[\exp(\mathrm{c}_2\frac{h}{\mathrm{h}_{\max}})-1\right]\right\}$$
$$\left[1-\frac{\left(x^2+y^2\right)^{\alpha_{\mathrm{mb}}}}{2\,\mathrm{r}_{\max}{}^{2\alpha}}\right]\exp\left[\frac{2-\left(x^2+y^2\right)^{\alpha_{\mathrm{mb}}}\Big/\mathrm{r}_{\mathrm{c}}{}^{2\alpha_{\mathrm{mb}}}}{2\alpha_{\mathrm{mb}}}\right] \tag{۵۶.۳}$$

در رابطه فوق، $x=p_n$ و $y=-p_e$ هستند. همچنین، $\alpha_{\mathrm{mb}}=2$ بیانگر مقدار متغیر شکل‌دهی[۱] است. بـه‌علاوه، λ بیانگر ضریب مقیاس[۲] است، که از رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\lambda = \frac{2\mathrm{u}_{\max}}{\mathrm{r}_{\max}\left[\exp(\mathrm{c}_1)-\exp(\mathrm{c}_2)\right]\exp(\frac{1}{2\alpha_{\mathrm{mb}}})} \tag{۵۷.۳}$$

در رابطه فوق، $\mathrm{r}_{\max}$، $\mathrm{h}_{\max}$ و $\mathrm{u}_{\max}$ به‌ترتیب بیانگر فاصله شعاعی، ارتفاع و اندازه متناظر با حداکثر سرعت افقی[۳] هستند. همچنین، در مرجع [۹۵] مقادیر پارامترهای c_1 و c_2 به‌ترتیب برابر بـا ۰/۱۵- و ۳/۲۱۷۵- پیشـنهاد شده‌اسـت. نمونـه‌ای از پارامترهـای مـدل مایکروبرسـت Vicroy در جـدول ۳.۳ نشـان داده شده‌است. مولفه‌های سرعت باد در مایکروبرست در نقطه P با تبدیل زیـر بـه سیسـتم مختصـات NED منتقل می‌شوند:

$$\mathbf{v}_{\mathrm{mb}}^{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} w_{n_{\mathrm{mb}}} \\ w_{e_{\mathrm{mb}}} \\ w_{d_{\mathrm{mb}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_{x_{\mathrm{mb}}} \\ w_{y_{\mathrm{mb}}} \\ w_{h_{\mathrm{mb}}} \end{bmatrix} \tag{۵۸.۳}$$

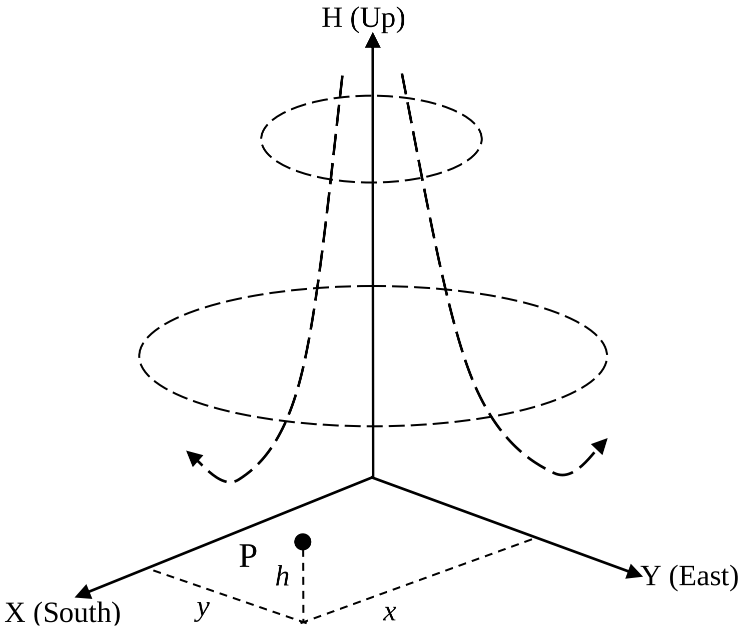
جدول ۳.۳ پارامترهای مدل مایکروبرست Vicroy.

پارامتر	توصیف	واحد	مقدار
$\mathrm{r}_{\max}$	فاصله شعاعی از مرکز مایکروبرست	ft	۳۶۷۸/۵
$\mathrm{h}_{\max}$	ارتفاع متناظر با حداکثر سرعت افقی	ft	۳۹۴
$\mathrm{u}_{\max}$	اندازه باد افقی ماکزیمم	ft/sec	۹۸/۴
(x_c, y_c)	مرکز مایکروبرست	ft	(0,0)

[1] Shaping Variable

[2] Scale Factor

[3] Most severe Horizontal Velocity



شکل ۱۲.۳ سیستم مختصات مدل Vicroy [۹۳].

۲.۲.۳ مدل‌سازی باد تصادفی

باد تصادفی می‌تواند به‌صورت یک سیگنال نویز سفید و/یا از طریق عبوردادن نویز سفید از یک فیلتر خطی نامتغیر با زمان توسط طیف توربولانس درایدن مدل‌سازی شود. در ادامه، مدل‌های باد تصادفی شامل نویز سفید و مدل‌های باد درایدن به‌ترتیب در بخش‌های ۱.۲.۲.۳ و ۲.۲.۲.۳ معرفی می‌شوند.

۱.۲.۲.۳ نویز سفید

در این بخش، باد تصادفی به‌صورت نویز سفید مدل‌سازی می‌شود. نویز سفید توسط یک طیف توانی در محدوده وسیعی از فرکانس‌ها مشخص می‌شود. این نویز، با استفاده از تولید اعداد تصادفی بر مبنای توزیع گوسی با میانگین صفر و کواریانس مشخص ($\mathbf{P}_{w_s}$) مدل می‌شود.

۲.۲.۲.۳ مدل درایدن

بر مبنای نتایج آزمایشگاهی، یک مدل مناسب برای تولید باد تصادفی از طریق عبوردادن یک سیگنال نویز سفید از فیلتر شکل‌دهنده[1] توسط مدل‌های باد دراین و ون‌کرامن حاصل می‌شود. فیلترهای

[1] Shaping Filter

شکل‌دهنده درایدن تقریب مناسبی به‌منظور تولید مولفه‌های توربولانس واقعی هستند؛ که به‌صورت زیـر در سیستم مختصات بدنی مدل می‌شوند [۹۶]:

$$G_u(s) = \sigma_u \sqrt{\frac{2\,V_a}{L_u}}\,\frac{1}{s + \frac{V_a}{L_u}} \tag{۵۹.۳}$$

$$G_v(s) = \sigma_v \sqrt{\frac{3\,V_a}{L_v}}\,\frac{\left(s + \frac{V_a}{\sqrt{3}L_v}\right)}{\left(s + \frac{V_a}{L_v}\right)^2} \tag{۶۰.۳}$$

$$G_w(s) = \sigma_w \sqrt{\frac{3\,V_a}{L_w}}\,\frac{\left(s + \frac{V_a}{\sqrt{3}L_w}\right)}{\left(s + \frac{V_a}{L_w}\right)^2} \tag{۶۱.۳}$$

در روابط فوق، σ_u، σ_v و σ_w بیانگر شدت توربولانس و L_u، L_v و L_w نشان‌دهنده طول مـوج توربـولانس در امتداد محورهای بدنی هستند. بر مبنـای MIL-F-8785C، پارامترهـای مـدل درایـدن در ارتفاع‌هـای پایین و متوسط و نیز برای شدت توربولانس‌های کم و متوسط در جدول ۴.۳ بیان شده‌است.

جدول ۴.۳ پارامترهای مدل درایدن [۹۶].

پارامتر	واحد	ارتفاع پایین		ارتفاع متوسط	
		توربولانس کم	توربولانس متوسط	توربولانس کم	توربولانس متوسط
ارتفاع	m	۵۰	۵۰	۶۰	۶۰
L_u=L_v	m	۲۰۰	۲۰۰	۵۳۳	۵۳۳
L_w	m	۵۰	۵۰	۵۳۳	۵۳۳
$\sigma_u = \sigma_v$	m/sec	۱/۰۶	۲/۱۲	۱/۵	۳
σ_w	m/sec	۰/۷	۱/۴	۱/۵	۳

۴ تحلیل مشاهده‌پذیری متغیرهای حالت و پدیده باد

به‌منظور کنترل دقیق پرنده بدون سرنشین معمولاً به تمام متغیرهای حالت و نیز اطلاعات ورودی‌های نامعلوم نیاز است. در عمل، بعضی از متغیرهای حالت اندازه‌گیری نمی‌شوند و نیز ورودی‌های نامعلوم قابل اندازه‌گیری نیستند. از آنجا که، باد متغیر با زمان است و در هنگام پرواز پرنده بدون سرنشین به‌صورت ورودی نامعلوم است؛ لذا، تحلیل مشاهده‌پذیری متغیرهای حالت پرنده در حضور باد، تحلیل مشاهده‌پذیری باد و تحلیل مشاهده‌پذیری توأمان متغیرهای حالت پرنده و باد با استفاده از اندازه‌گیری ضروری است.

در این فصل، ابتدا تعاریف و قضایای مرتبط با مشاهده‌پذیری متغیرهای حالت، مشاهده‌پذیری قوی، مشاهده‌پذیری ورودی‌های نامعلوم و مشاهده‌پذیری توأمان متغیرهای حالت و ورودی‌های نامعلوم برای سیستم‌های خطی پیوسته زمان و سیستم‌های خطی گسسته زمان به‌ترتیب در بخش‌های ۱.۴ و ۲.۴ توسعه داده می‌شود. سپس، این مفاهیم برای سیستم‌های غیرخطی افاین پیوسته زمان در بخش ۳.۴ توسعه داده می‌شود. در انتها، در بخش ۴.۴ مشاهده‌پذیری متغیرهای حالت پرنده بدون سرنشین، مدل باد و پارامترهای هر مدل باد بررسی می‌شوند.

۱.۴ تحلیل مشاهده‌پذیری سیستم‌های خطی پیوسته زمان

این بخش به تحلیل مشاهده‌پذیری متغیرهای حالت و ورودی‌های نامعلوم برای سیستم‌های خطی پیوسته زمان می‌پردازد. مدل فضای حالت یک سیستم خطی پیوسته زمان به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\boldsymbol{\delta} + \mathbf{B}_d\,\mathbf{d} \qquad (۱.۴)$$

در معادله فوق، $\mathbf{x}$، $\boldsymbol{\delta}$ و $\mathbf{d}$ به‌ترتیب بیانگر متغیرهای حالت، ورودی‌های کنترلی و ورودی‌های نامعلوم (همچون باد) هستند. همچنین، $\mathbf{A}$، $\mathbf{B}$ و $\mathbf{B}_d$ به‌ترتیب نشان‌دهنده ماتریس‌های سیستم، ورودی‌های کنترل و ورودی‌های نامعلوم هستند. به علاوه، معادله اندازه‌گیری به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\boldsymbol{\delta} + \mathbf{D}_d\,\mathbf{d} \tag{۲.۴}$$

در معادله فوق، $\mathbf{C}$ و $\mathbf{D}$ به‌ترتیب بیانگر ماتریس خروجی و ماتریس پیش‌خور[1] ورودی معلوم هستند. همچنین، $\mathbf{D}_d$ ماتریس پیش‌خور ورودی نامعلوم است.

۱.۱.۴ تحلیل مشاهده‌پذیری متغیرهای حالت

از تئوری مشاهده‌پذیری متغیرهای حالت به‌منظور بررسی امکان بازیابی متغیرهای حالت با استفاده از اندازه‌گیری‌های موجود استفاده می‌شود. در این بخش، تعاریف و قضیه مربوط به تحلیل مشاهده‌پذیری متغیرهای حالت برای سیستم خطی پیوسته زمان بیان می‌شود.

تعریف ۱: سیستم خطی پیوسته زمان، بیان‌شده در معادلات (۱.۴) و (۲.۴)، **مشاهده‌پذیر متغیر حالت** نامیده می‌شود؛ اگر مقدار اولیه بردار متغیر حالت $\mathbf{x}_0$ با استفاده از خروجی‌های $\mathbf{z}^{(i)}$ و ورودی‌های معلوم $\boldsymbol{\delta}^{(i)}$ به‌ازای هر $\mathbf{x}_0$ و برای تمام $t \in [0,\tau]$ قابل بازیابی باشد. در اینجا، $\mathbf{z}^{(i)}$ مشتق مرتبه i-ام خروجی $\mathbf{z}$ نسبت به زمان است.

تعریف ۲: متغیر حالت $\mathbf{x}$ **مشاهده‌پذیر متغیر حالت** نامیده می‌شود؛ اگر به‌ازای هر $\mathbf{x}'$ در همسایگی متغیر حالت $\mathbf{x}$ و هر ورودی معلوم $\boldsymbol{\delta}^*$

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}',\boldsymbol{\delta}^*) \neq \mathbf{z}(\mathbf{x},\boldsymbol{\delta}^*) \tag{۳.۴}$$

قضیه ۱ (شرط مشاهده‌پذیری متغیر حالت): سیستم خطی پیوسته زمان، بیان‌شده در معادلات (۱.۴) و (۲.۴)، **مشاهده‌پذیر متغیر حالت** است؛ اگر و فقط اگر

[1] Feedforward Matrix

$$\operatorname{rank}\left(\mathbf{O}_{\mathrm{n}}\right)=\mathrm{n} \tag{۴.۴}$$

در رابطه فوق، n بیانگر تعداد متغیرهای حالت است. همچنین، $\mathbf{O}_{\mathrm{n}}$ نشان‌دهنده ماتریس مشاهده‌پذیری است؛ که به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۹۷]:

$$\mathbf{O}_{\mathrm{n}}=\begin{bmatrix}\mathbf{C}\\ \mathbf{CA}\\ \ldots\\ \mathbf{CA}^{\mathrm{n}-1}\end{bmatrix} \tag{۵.۴}$$

۲.۱.۴ تحلیل مشاهده‌پذیری قوی

در این بخش، تئوری مشاهده‌پذیری قوی به‌منظور تحلیل مشاهده‌پذیری متغیرهای حالت در حضور ورودی‌های نامعلوم با استفاده از اندازه‌گیری‌های موجود بیان می‌شود. سپس، دو تعریف و یک قضیه به منظور آنالیز مشاهده‌پذیری قوی برای سیستم‌های خطی بیان می‌شود.

تعریف ۳: سیستم خطی پیوسته، بیان‌شده در معادلات (۱.۴) و (۲.۴)، **مشاهده‌پذیر قوی** نامیده می‌شود؛ اگر مقدار ابتدایی بردار متغیر حالت $\mathbf{x}_0$ با استفاده از خروجی‌های $\mathbf{z}^{(i)}$ و ورودی‌های معلوم $\boldsymbol{\delta}^{(i)}$ به‌ازای هر $\mathbf{x}_0$ و هر $\mathbf{d}^{(i)}$ و برای تمام $t\in[0,\tau]$ قابل بازیابی باشد. در اینجا، $\mathbf{d}^{(i)}$ مشتق مرتبه i-ام ورودی‌های نامعلوم $\mathbf{d}$ نسبت به زمان است.

تعریف ۴: متغیر حالت $\mathbf{x}$ **مشاهده‌پذیر قوی** نامیده می‌شود؛ اگر به‌ازای هر $\mathbf{x}'$ در همسایگی متغیر حالت $\mathbf{x}$، هر ورودی نامعلوم $\mathbf{d}'$ و $\mathbf{d}$ و هر ورودی معلوم $\boldsymbol{\delta}^*$

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}',\boldsymbol{\delta}^*,\mathbf{d}')\neq\mathbf{z}(\mathbf{x},\boldsymbol{\delta}^*,\mathbf{d}) \tag{۶.۴}$$

قضیه ۲ (شرایط مشاهده‌پذیری قوی): سیستم خطی پیوسته زمان، بیان‌شده در معادلات (۱.۴) و (۲.۴)، **مشاهده‌پذیر قوی** است؛ اگر و فقط اگر [۹۸]

$$\operatorname{rank}\left(\mathbf{O}_{\mathrm{n}}\right)=\mathrm{n} \tag{۷.۴}$$

و

$$\mathrm{rank}\left(\begin{bmatrix}\mathbf{O}_{n} & \mathbf{W_d}\end{bmatrix}\right) = n + \mathrm{rank}\left(\mathbf{W_d}\right) \tag{۸.۴}$$

در رابطه فوق، $\mathbf{W_d}$ بیانگر ماتریس معکوس‌پذیری ورودی‌های نامعلوم است؛ که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{W_d} = \begin{bmatrix} \mathbf{D_d} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CB_d} & \mathbf{D_d} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CAB_d} & \mathbf{CB_d} & \mathbf{D_d} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-2}\mathbf{B_d} & \mathbf{CA}^{n-3}\mathbf{B_d} & \mathbf{CA}^{n-4}\mathbf{B_d} & \cdots & \mathbf{D_d} \end{bmatrix} \tag{۹.۴}$$

اثبات قضیه ۲ مرتبط با شرایط مشاهده‌پذیری قوی در پیوست "ت" بیان شده‌است.

۳.۱.۴ تحلیل مشاهده‌پذیری ورودی نامعلوم

در این بخش، تئوری ورودی‌های نامعلوم به‌منظور تحلیل مشاهده‌پذیری ورودی نامعلوم با استفاده از اندازه‌گیری‌های موجود معرفی می‌شود. به این‌منظور، ابتدا مشاهده‌پذیری ورودی نامعلوم تعریف می‌شود. سپس، یک شرط برای بررسی مشاهده‌پذیری ورودی نامعلوم برای سیستم خطی پیوسته زمان بیان می‌شود.

تعریف ۵: سیستم خطی پیوسته زمان، بیان‌شده در معادلات (۱.۴) و (۲.۴)، **مشاهده‌پذیر ورودی نامعلوم** نامیده می‌شود؛ اگر بردار ورودی نامعلوم $\mathbf{d}_0$ با استفاده از خروجی‌ها، $\mathbf{z}^{(i)}$، متغیر حالت $\mathbf{x}_0$ و ورودی‌های معلوم $\boldsymbol{\delta}^{(i)}$ به‌ازای هر $\mathbf{d}^{(i+1)}$ و برای تمام $t \in [0,\tau]$ قابل بازیابی باشد.

تعریف ۶: بردار ورودی مجهول $\mathbf{d}$ **مشاهده‌پذیر ورودی نامعلوم** نامیده می‌شود؛ اگر به‌ازای هر بردار ورودی نامعلوم $\mathbf{d}'$ در همسایگی $\mathbf{d}$، هر متغیر حالت $\mathbf{x}'$ و $\mathbf{x}$ و هر ورودی معلوم $\boldsymbol{\delta}^*$

$$\mathbf{z}\left(\mathbf{x}',\boldsymbol{\delta}^*,\mathbf{d}'\right) \neq \mathbf{z}\left(\mathbf{x}\ ,\boldsymbol{\delta}^*,\mathbf{d}\right) \tag{۱۰.۴}$$

قضیه ۳ (شرط مشاهده‌پذیری ورودی نامعلوم): سیستم خطی پیوسته زمان، بیان‌شده در معـادلات (۱.۴) و (۲.۴)، **مشاهده‌پذیر ورودی نامعلوم** است؛ اگر و فقط اگر

$$\mathrm{rank}\left(\mathbf{O_d}\right)=\mathrm{n}_\mathbf{d} \tag{۱۱.۴}$$

و

$$\mathrm{rank}\left(\mathbf{W_d}\right)=\mathrm{n_d}+\mathrm{rank}\left(\mathbf{W'_d}\right) \tag{۱۲.۴}$$

در رابطـه فـوق، $\mathrm{n_d}$ بیـانگر تعـداد ورودی‌هـای نـامعلوم اســت. همچنــین، $\mathbf{O_d}$ نشـان‌دهنده مـاتریس مشاهده‌پذیری ورودی‌های نامعلوم است؛ که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{O_d}=\begin{bmatrix}\mathbf{D_d}\\ \mathbf{CB_d}\\ \mathbf{CAB_d}\\ \vdots\\ \mathbf{CA}^{\mathrm{n-1}}\mathbf{B_d}\end{bmatrix} \tag{۱۳.۴}$$

همچنین، $\mathbf{W'_d}$ بیانگر ماتریس معکوس‌پذیری ورودی‌های نامعلوم مرتبط با اولین تا nامین مشتق زمـانی از ورودی نامعلوم $\mathbf{d}$ است؛ که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{W'_d}=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \mathbf{D_d} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \mathbf{CB_d} & \mathbf{D_d} & \cdots & \mathbf{0}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{CA}^{\mathrm{n-2}}\mathbf{B_d} & \mathbf{CA}^{\mathrm{n-3}}\mathbf{B_d} & \cdots & \mathbf{D_d}\end{bmatrix} \tag{۱۴.۴}$$

اثبات قضیه ۳ مرتبط با شرایط مشاهده‌پذیری ورودی‌های نامعلوم، که توسط نگارنده انجام شـده، در پیوست "ت" ارائه شده‌است.

۴.۱.۴ تحلیل مشاهده‌پذیری توأمان متغیرهای حالت و ورودی نامعلوم

از تئوری مشاهده‌پذیری توأمان متغیرهای حالت و ورودی نامعلوم به‌منظور تحلیل مشاهده‌پذیری همزمان متغیرهای حالت و ورودی‌های نامعلوم با استفاده از اندازه‌گیری‌های موجود استفاده می‌شود. در این بخش، ابتدا مشاهده‌پذیری توأمان متغیرهای حالت و ورودی نامعلوم برای سیستم خطی پیوسته زمان تعریف می‌شود. سپس، یک شرط برای تحلیل مشاهده‌پذیری توأمان متغیرهای حالت و ورودی نامعلوم بیان می‌شود.

تعریف ۷: سیستم خطی پیوسته زمان، بیان‌شده در معادلات (۱.۴) و (۲.۴)، **مشاهده‌پذیر توأمان متغیر حالت و ورودی نامعلوم** نامیده می‌شود؛ اگر مقدار اولیه بردار متغیر حالت افزونه[1] $\mathbf{x}_{a_0}=\left[\mathbf{x}_0^{\mathrm{T}} \quad \mathbf{d}_0^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$ با استفاده از $\mathbf{z}^{(i)}$ و ورودی‌های معلوم $\boldsymbol{\delta}^{(i)}$ به‌ازای هر متغیر حالت افزونه $\mathbf{x}_{a_0}$ و هر ورودی نامعلوم $\mathbf{d}^{(i+1)}$ و برای تمام $t\in[0,\tau]$ بازیابی شود.

تعریف ۸: متغیر حالت افزونه $\mathbf{x}_a$ **مشاهده‌پذیر توأمان متغیرهای حالت و ورودی‌های نامعلوم** نامیده می‌شود؛ اگر به‌ازای هر متغیر حالت افزونه $\mathbf{x}_a'$ در همسایگی متغیر حالت افزونه $\mathbf{x}_a$ و هر ورودی معلوم $\boldsymbol{\delta}^*$

$$\mathbf{z}\left(\mathbf{x}_a' ,\boldsymbol{\delta}^*\right)\neq\mathbf{z}\left(\mathbf{x}_a ,\boldsymbol{\delta}^*\right) \tag{۱۵.۴}$$

قضیه ۴ (شرط مشاهده‌پذیری توأمان متغیرهای حالت و ورودی نامعلوم): سیستم خطی پیوسته زمان، بیان‌شده در معادلات (۱.۴) و (۲.۴)، **مشاهده‌پذیر توأمان متغیرهای حالت و ورودی نامعلوم** است؛ اگر و فقط اگر

$$\mathrm{rank}\left(\mathbf{O}_{nd}\right)=\mathrm{n}+\mathrm{n}_{\mathrm{d}} \tag{۱۶.۴}$$

و

[1] Augmented

$$\text{rank}\left(\left[\mathbf{O}_{\text{nd}} \quad \mathbf{W}_{\mathbf{d}}'\right]\right) = \text{n}+\text{n}_{\text{d}}+\text{rank}\left(\mathbf{W}_{\mathbf{d}}'\right) \tag{۱۷.۴}$$

در رابطه فوق، $\mathbf{O}_{\text{nd}}$ نشان‌دهنده ماتریس مشاهده‌پذیری توأمان متغیرهای حالت و ورودی‌های نامعلوم است؛ که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{O}_{\text{nd}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D_d} \\ \mathbf{CA} & \mathbf{CB_d} \\ \mathbf{CA}^2 & \mathbf{CAB_d} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{\text{n}} & \mathbf{CA}^{\text{n}-1}\mathbf{B_d} \end{bmatrix} \tag{۱۸.۴}$$

اثبات قضیه ۴ مرتبط با شرایط مشاهده‌پذیری توأمان متغیرهای حالت و ورودی‌های نامعلوم، که توسط نگارنده انجام شده، در پیوست "ت" ارائه شده‌است.

۵.۱.۴ تحلیل مشاهده‌پذیری متغیرهای حالت سیستم غیرخطی در حضور خطای خطی‌سازی

در این بخش، تاثیر خطاهای خطی‌سازی سیستم غیرخطی بر مشاهده‌پذیری متغیرهای حالت بررسی می‌شود. به‌این‌منظور، مدل فضای حالت به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{B}\,\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{۱۹.۴}$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}\,\mathbf{x} \tag{۲۰.۴}$$

در رابطه فوق، $\boldsymbol{\varepsilon}$ بیانگر خطاهای خطی‌سازی سیستم غیرخطی است. در ادامه، یک تعریف و یک قضیه به‌منظور بیان شرط مشاهدپذیری متغیرهای حالت در حضور خطاهای خطی‌سازی بیان می‌شود.

تعریف ۹: سیستم خطی پیوسته زمان، بیان‌شده در معادلات (۱۹.۴) و (۲۰.۴)، **مشاهده‌پذیر متغیر حالت درحضور خطاهای خطی‌سازی سیستم غیرخطی** نامیده می‌شود؛ اگر مقدار اولیه بردار متغیر حالت $\mathbf{x}_0$ با استفاده از $\mathbf{z}^{(i)}$ به‌ازای هر $\mathbf{x}_0$ و هر $\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)}$ و برای تمام $t \in [0,\tau]$ بازیابی شود. در اینجا، $\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)}$ بیانگر مشتق زمانی i-ام خطاهای خطی‌سازی است.

قضیه ۵ (شرط مشاهده‌پذیری متغیر حالت سیستم غیرخطی درحضور خطاهای خطی‌سازی): سیستم خطی پیوسته زمان، بیان‌شده در معادلات (۱۹.۴) و (۲۰.۴)، **مشاهده‌پذیر متغیر حالت سیستم غیرخطی درحضور خطاهای خطی‌سازی** است؛ اگر و فقط اگر

$$\mathrm{rank}\left(\mathbf{O}_{\mathrm{n}}\right)=\mathrm{n} \tag{۲۱.۴}$$

و

$$\mathrm{rank}\left(\left[\mathbf{O}_{\mathrm{n}} \quad \mathbf{E}_{\mathrm{n}}\right]\right)=\mathrm{n}+\mathrm{rank}\left(\mathbf{E}_{\mathrm{n}}\right) \tag{۲۲.۴}$$

در رابطه فوق، $\mathbf{O}_{\mathrm{n}}$ نشان‌دهنده ماتریس مشاهده‌پذیری متغیرهای حالت است؛ که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{O}_{\mathrm{n}}=\begin{bmatrix}\mathbf{C}\\ \mathbf{CA}\\ \mathbf{CA}^2\\ \vdots\\ \mathbf{CA}^{\mathrm{n}-1}\end{bmatrix} \tag{۲۳.۴}$$

همچنین، $\mathbf{E}_{\mathrm{n}}$ بیانگر ماتریس خطای سیستم خطی‌شده است، که به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\mathbf{E}_{\mathrm{n}}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \mathbf{Cm} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \mathbf{CAm} & \mathbf{Cm} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \mathbf{CA}^{\mathrm{n}-2}\mathbf{m} & \mathbf{CA}^{\mathrm{n}-3}\mathbf{m} & \cdots & \mathbf{Cm} & \mathbf{0}\end{bmatrix} \tag{۲۴.۴}$$

در رابطه فوق، $\mathbf{m}$ بیانگر بردار مرتبط با بزرگترین مقدار مشتق مرتبه دوم سیستم غیرخطی مورد نظر در یک نقطه مشخص است، که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{m}=\begin{bmatrix}\max\left(\left|\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1{}^2}\right|,\left|\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 x_2}\right|,\ldots,\left|\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 x_{\mathrm{n}}}\right|\ldots,\left|\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_{\mathrm{n}}{}^2}\right|\right)\\ \max\left(\left|\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1{}^2}\right|,\left|\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 x_2}\right|,\ldots,\left|\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 x_{\mathrm{n}}}\right|\ldots,\left|\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_{\mathrm{n}}{}^2}\right|\right)\\ \vdots\\ \max\left(\left|\frac{\partial^2 f_{\mathrm{n}}}{\partial x_1{}^2}\right|,\left|\frac{\partial^2 f_{\mathrm{n}}}{\partial x_1 x_2}\right|,\ldots,\left|\frac{\partial^2 f_{\mathrm{n}}}{\partial x_1 x_{\mathrm{n}}}\right|\ldots,\left|\frac{\partial^2 f_{\mathrm{n}}}{\partial x_{\mathrm{n}}{}^2}\right|\right)\end{bmatrix} \tag{۲۵.۴}$$

که، $\mathbf{f}=\begin{bmatrix}f_1 & f_2 & \cdots & f_{\mathrm{n}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ مدل غیرخطی سیستم است.

اثبات قضیه ۵ مرتبط با شرایط مشاهده‌پذیری متغیر حالت درحضور خطاهای خطی‌سازی سیستم غیرخطی، که توسط نگارنده انجام شده، در پیوست "ت" ارائه شده‌است.

۶.۱.۴ تحلیل مشاهده‌پذیری ورودی‌های نامعلوم در حضور ماتریس متغیر با زمان ورودی‌های نامعلوم

در این بخش، تاثیر ماتریس متغیر با زمان ورودی‌های نامعلوم بر روی مشاهده‌پذیری متغیرهای حالت بررسی می‌شود. به این‌منظور، مدل فضای حالت به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\,\mathbf{x}+\mathbf{B}\,\boldsymbol{\delta}+\mathbf{B_d}(t)\,\mathbf{d} \tag{۲۶.۴}$$

$$\mathbf{z}=\mathbf{C}\,\mathbf{x}+\mathbf{D}\,\boldsymbol{\delta}+\mathbf{D}\,\mathbf{d} \tag{۲۷.۴}$$

در رابطه فوق، $\mathbf{B_d}(t)$ بیانگر ماتریس متغیر با زمان ورودی‌های نامعلوم است.

قضیه ۶ (شرط مشاهده‌پذیری ورودی‌های نامعلوم در حضور ماتریس متغیر با زمان ورودی‌های نامعلوم): سیستم خطی پیوسته زمان، بیان‌شده در معادلات (۲۶.۴) و (۲۷.۴)، **مشاهده‌پذیر ورودی‌های نامعلوم در حضور ماتریس متغیر با زمان ورودی‌های نامعلوم** است؛ اگر و فقط اگر

$$\mathrm{rank}\left(\mathbf{O_d}(t)\right)=\mathrm{n_d} \tag{۲۸.۴}$$

و

$$\mathrm{rank}\left(\begin{bmatrix}\mathbf{O_d}(t) & \mathbf{W}'_{\mathbf{d}}(t)\end{bmatrix}\right)=\mathrm{n_d}+\mathrm{rank}\left(\mathbf{W}'_{\mathbf{d}}(t)\right) \tag{۲۹.۴}$$

در روابط فوق، $\mathbf{O_d}(t)$ و $\mathbf{W}'_{\mathbf{d}}(t)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{O}_{\mathbf{d}_t} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_\mathbf{d} \\ \mathbf{C}\mathbf{B}_\mathrm{d}(t) \\ \mathbf{CAB}_\mathrm{d}(t) + \mathbf{CAB}_\mathrm{d}^{(1)}(t) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{\mathrm{n}-1} \mathbf{CA}^{\mathrm{n}-1-j}\,\mathbf{B}_\mathrm{d}^{(j-1)}(t) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{i} \mathbf{CA}^{i-j}\,\mathbf{B}_\mathrm{d}^{(j-1)}(t) \end{bmatrix} \qquad (۳۰.۴)$$

$$\mathbf{W}'_{\mathbf{d}_t} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_\mathbf{d} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}\mathbf{B}_\mathrm{d}(t) & \mathbf{D}_\mathbf{d} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^{\mathrm{n}-2} j\,\mathbf{CA}^{\mathrm{n}-2-j}\,\mathbf{B}_\mathrm{d}^{(j-1)}(t) & \cdots & \sum_{j=1}^{\mathrm{n}-1-m} \frac{(j+m-1)!}{(j-1)!m!}\mathbf{CA}^{\mathrm{n}-1-m-j}\,\mathbf{B}_\mathrm{d}^{(j-1)}(t) & \mathbf{D}_\mathbf{d} \end{bmatrix} \qquad (۳۱.۴)$$

اینجا، m=0,...,n−1 و $\mathbf{O}_\mathbf{d}(t)$ ماتریس مشاهده‌پذیری متغیر با زمان ورودی‌های نامعلوم نامیده می‌شود. اثبات قضیه ۶ مرتبط با شرایط مشاهده‌پذیری ورودی‌های نامعلوم در حضور ماتریس متغیر با زمان ورودی‌های نامعلوم، که توسط نگارنده انجام شده، در پیوست "ت" ارائه شده‌است.

۲.۴ تحلیل مشاهده‌پذیری سیستم‌های خطی گسسته زمان

این بخش به تحلیل مشاهده‌پذیری متغیرهای حالت و ورودی‌های نامعلوم برای سیستم‌های خطی گسسته زمان می‌پردازد. مدل فضای حالت یک سیستم خطی گسسته زمان به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{A}\,\mathbf{x}_t + \mathbf{B}\;\boldsymbol{\delta}_t + \mathbf{B}_\mathbf{d}\,\mathbf{d}_t \qquad (۳۲.۴)$$

در معادله فوق، $\mathbf{x}_t$، $\boldsymbol{\delta}_t$ و $\mathbf{d}_t$ به‌ترتیب بیانگر متغیرهای حالت، ورودی‌های کنترلی و ورودی‌های نامعلوم (همچون باد) در زمان نمونه‌برداری t هستند. همچنین، $\mathbf{A}$، $\mathbf{B}$ و $\mathbf{B}_\mathrm{d}$ به‌ترتیب نشان‌دهنده ماتریس سیستم، ماتریس ورودی‌های کنترل و ماتریس ورودی‌های نامعلوم هستند. به‌علاوه، معادله اندازه‌گیری به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{C}\,\mathbf{x}_t + \mathbf{D}\,\boldsymbol{\delta}_t + \mathbf{D_d}\,\mathbf{d}_t \tag{۳۳.۴}$$

در معادله فوق، $\mathbf{C}$ و $\mathbf{D}$ به‌ترتیب بیانگر ماتریس خروجی و پیش‌خور ورودی معلوم هستند. همچنین، $\mathbf{D}_{\mathrm{d}}$ نشان‌دهنده ماتریس پیش‌خور ورودی نامعلوم است.

۱.۲.۴ تحلیل مشاهده‌پذیری متغیرهای حالت

در این بخش، تعاریف و قضیه مربوط به تحلیل مشاهده‌پذیری متغیرهای حالت برای سیستم خطی گسسته زمان بیان می‌شود.

تعریف ۱۰: سیستم خطی گسسته زمان، بیان‌شده در معادلات (۳۲.۴) و (۳۳.۴)، مشاهده‌پذیر متغیر حالت در فاصله زمانی $[0,\tau]$ نامیده می‌شود؛ اگر مقدار اولیه بردار متغیر حالت $\mathbf{x}_0$ با استفاده از دنباله خروجی‌های $\mathbf{z}_t$ و ورودی‌های معلوم $\boldsymbol{\delta}_t$ به‌ازای هر متغیر ابتدایی $\mathbf{x}_0$ و برای تمام $t\in[0,\tau]$ قابل بازیابی باشد.

تعریف ۱۱: متغیر حالت $\mathbf{x}_k$ مشاهده‌پذیر متغیر حالت نامیده می‌شود؛ اگر برای هر $\mathbf{x}'_k$ در همسایگی متغیر حالت $\mathbf{x}_k$ و هر ورودی معلوم $\boldsymbol{\delta}^*$

$$\mathbf{z}_k\left(\mathbf{x}'_k,\boldsymbol{\delta}^*_k\right) \neq \mathbf{z}_k\left(\mathbf{x}_k,\boldsymbol{\delta}^*_k\right) \tag{۳۴.۴}$$

قضیه ۷ (**شرط مشاهده‌پذیری متغیر حالت**)**:** سیستم خطی گسسته زمان، بیان‌شده در معادلات (۳۲.۴) و (۳۳.۴)، مشاهده‌پذیر متغیر حالت است؛ اگر و فقط اگر

$$\operatorname{rank}\left(\mathbf{O}_{\mathrm{n}}\right) = \mathrm{n} \tag{۳۵.۴}$$

در رابطه فوق، n بیانگر تعداد متغیرهای حالت است. همچنین، $\mathbf{O}_{\mathrm{n}}$ نشان‌دهنده ماتریس مشاهده‌پذیری است؛ که به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۹۷]:

$$\mathbf{O}_{\mathrm{n}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \dots \\ \mathbf{CA}^{\mathrm{n}-1} \end{bmatrix} \qquad (۳۶.۴)$$

۲.۲.۴ تحلیل مشاهده‌پذیری قوی

در این بخش، تئوری مشاهده‌پذیری قوی به‌منظور تحلیل مشاهده‌پذیری متغیرهای حالت در حضور ورودی‌های نامعلوم برای یک سیستم خطی گسسته زمان بیان می‌شود. به این‌منظور، در ادامه دو تعریف و یک قضیه به منظور تحلیل مشاهده‌پذیری قوی برای سیستم‌های خطی گسسته زمان بیان می‌شود.

تعریف ۱۲: سیستم خطی گسسته زمان، بیان‌شده در معادلات (۳۲.۴) و (۳۳.۴)، مشاهده‌پذیر قوی در فاصله $[0,\tau]$ نامیده می‌شود؛ اگر $\mathbf{x}_0$ با استفاده از دنباله خروجی‌های $\mathbf{z}_t$ و ورودی‌های معلوم $\boldsymbol{\delta}_t$ به‌ازای هر متغیر ابتدایی $\mathbf{x}_0$ و هر دنباله ورودی‌های مجهول $\mathbf{d}_t$ و برای تمام $t \in [0,\tau]$ قابل بازیابی باشد.

تعریف ۱۳: متغیر حالت $\mathbf{x}_k$ مشاهده‌پذیر قوی نامیده می‌شود؛ اگر برای هر $\mathbf{x}'_k$ در همسایگی متغیر حالت $\mathbf{x}_k$، هر ورودی نامعلوم $\mathbf{d}'_k$ و $\mathbf{d}_k$ و هر ورودی معلوم $\boldsymbol{\delta}^*_k$

$$\mathbf{z}_k\left(\mathbf{x}'_k, \boldsymbol{\delta}^*_k, \mathbf{d}'_k\right) \neq \mathbf{z}_k\left(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\delta}^*_k, \mathbf{d}_k\right) \qquad (۳۷.۴)$$

قضیه ۸ (شرط مشاهده‌پذیری قوی): سیستم خطی گسسته زمان، بیان‌شده در معادلات (۳۲.۴) و (۳۳.۴)، مشاهده‌پذیر قوی است؛ اگر و فقط اگر [۹۸]

$$\operatorname{rank}\left(\mathbf{O}_{\mathrm{n}}\right) = \mathrm{n} \qquad (۳۸.۴)$$

و

$$\operatorname{rank}\left(\left[\mathbf{O}_{\mathrm{n}} \quad \mathbf{W}_{\mathbf{d}}\right]\right) = \mathrm{n} + \operatorname{rank}\left(\mathbf{W}_{\mathbf{d}}\right) \qquad (۳۹.۴)$$

در رابطه فوق، $\mathbf{W}_{\mathbf{d}}$ بیانگر ماتریس معکوس‌پذیری ورودی‌های نامعلوم است؛ که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{W_d}=\begin{bmatrix} \mathbf{D_d} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CB_d} & \mathbf{D_d} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CAB_d} & \mathbf{CB_d} & \mathbf{D_d} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-2}\mathbf{B_d} & \mathbf{CA}^{n-3}\mathbf{B_d} & \mathbf{CA}^{n-4}\mathbf{B_d} & \cdots & \mathbf{D_d} \end{bmatrix} \tag{۴۰.۴}$$

اثبات قضیه ۸ مرتبط با شرایط مشاهده‌پذیری قوی در پیوست "ث" بیان شده‌است.

۳.۲.۴ تحلیل مشاهده‌پذیری ورودی نامعلوم

در این بخش، ابتدا مشاهده‌پذیری ورودی نامعلوم برای یک سیستم خطی گسسته زمان تعریف می‌شود. سپس، یک شرط برای بررسی مشاهده‌پذیری ورودی نامعلوم برای سیستم خطی گسسته زمان بیان می‌شود.

تعریف ۱۴: سیستم خطی گسسته زمان، بیان‌شده در معادلات (۳۲.۴) و (۳۳.۴)، مشاهده‌پذیر ورودی مجهول در فاصله $[0,\tau]$ نامیده می‌شود؛ اگر بردار ورودی نامعلوم $\mathbf{d}_0$ با استفاده از دنباله‌های خروجی، $\mathbf{z}_t$، و ورودی‌های معلوم $\boldsymbol{\delta}_t$ به‌ازای هر دنباله از ورودی‌های نامعلوم $\mathbf{d}_t$ و برای تمام $t\in[0,\tau]$ قابل بازیابی باشد.

تعریف ۱۵: بردار ورودی مجهول $\mathbf{d}_k$ مشاهده‌پذیر ورودی مجهول نامیده می‌شود؛ اگر برای هر بردار ورودی نامعلوم $\mathbf{d}'_k$ در همسایگی $\mathbf{d}_k$، هر متغیر حالت $\mathbf{x}_k$ و $\mathbf{x}'_k$ و هر ورودی معلوم $\boldsymbol{\delta}^*_k$

$$\mathbf{z}_k\left(\mathbf{x}'_k,\boldsymbol{\delta}^*_k,\mathbf{d}'_k\right)\neq\mathbf{z}_k\left(\mathbf{x}_k,\boldsymbol{\delta}^*_k,\mathbf{d}_k\right) \tag{۴۱.۴}$$

قضیه ۹ (شرط مشاهده‌پذیری ورودی نامعلوم): سیستم خطی پیوسته، بیان‌شده در معادلات (۳۲.۴) و (۳۳.۴)، مشاهده‌پذیر ورودی نامعلوم است؛ اگر و فقط اگر

$$\mathrm{rank}\left(\mathbf{O_d}\right)=\mathrm{n}_\mathbf{d} \tag{۴۲.۴}$$

و

$$\mathrm{rank}\left(\mathbf{W_d}\right)=\mathrm{n_d}+\mathrm{rank}\left(\mathbf{W'_d}\right) \tag{۴۳.۴}$$

در رابطه فوق، n_d بیانگر تعداد ورودی‌های نامعلوم است. همچنین، $\mathbf{O_d}$ نشان‌دهنده ماتریس مشاهده‌پذیری ورودی‌های نامعلوم است؛ که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{O_d}=\begin{bmatrix}\mathbf{D_d}\\ \mathbf{CB_d}\\ \mathbf{CAB_d}\\ \vdots\\ \mathbf{CA^{n-1}B_d}\end{bmatrix} \tag{۴۴.۴}$$

همچنین، $\mathbf{W'_d}$ بیانگر ماتریس معکوس‌پذیری ورودی‌های نامعلوم مرتبط با گام‌های زمانی $k+1$ تا $k+n$ است؛ که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{W'_d}=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \mathbf{D_d} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \mathbf{CB_d} & \mathbf{D_d} & \cdots & \mathbf{0}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{CA^{n-2}B_d} & \mathbf{CA^{n-3}B_d} & \cdots & \mathbf{D_d}\end{bmatrix} \tag{۴۵.۴}$$

اثبات قضیه ۹ مرتبط با شرایط مشاهده‌پذیری ورودی‌های نامعلوم، که توسط نگارنده انجام شده، در پیوست "ث" ارائه شده‌است.

۴.۲.۴ تحلیل مشاهده‌پذیری توأمان متغیرهای حالت و ورودی نامعلوم

در این بخش، ابتدا مشاهده‌پذیری توأمان متغیرهای حالت و ورودی نامعلوم برای سیستم خطی گسسته زمان تعریف می‌شود. سپس، یک شرط برای تحلیل مشاهده‌پذیری توأمان متغیرهای حالت و ورودی نامعلوم بیان می‌شود.

تعریف ۱۶: سیستم خطی گسسته زمان، بیان‌شده در معادلات (۳۲.۴) و (۳۳.۴)، **مشاهده‌پذیر توأمان متغیر حالت و ورودی نامعلوم** در فاصله زمانی $[0,\tau]$ نامیده می‌شود؛ اگر مقدار اولیه بردار متغیر

حالت ابتدایی $\mathbf{x}_{a_0} = \left[\mathbf{x}_0^{\mathrm{T}} \quad \mathbf{d}_0^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$ با استفاده از دنباله خروجی‌های $\mathbf{z}_t$ و ورودی‌های معلوم $\boldsymbol{\delta}_t$ بـه‌ازای هر متغیر حالت افزونه $\mathbf{x}_{a_0}$ و هر ورودی مجهول $\mathbf{d}_1,\ldots,\mathbf{d}_\tau$ و برای تمام $t \in [0,\tau]$ بازیابی شود.

تعریف ۱۷: متغیر حالت افزونه $\mathbf{x}_{a_k}$ **مشاهده‌پذیر توأمان متغیرهای حالت و ورودی‌هـای نـامعلوم** نامیده می‌شود؛ اگر برای هر متغیر حالت افزونه $\mathbf{x}'_{a_k}$ در همسایگی متغیر حالت افزونه $\mathbf{x}_{a_k}$ و هـر ورودی معلوم $\boldsymbol{\delta}_k^*$

$$\mathbf{z}_k\left(\mathbf{x}'_{a_k}, \boldsymbol{\delta}_k^*\right) \neq \mathbf{z}_k\left(\mathbf{x}_{a_k}, \boldsymbol{\delta}_k^*\right) \qquad (۴۶.۴)$$

قضیه ۱۰ (شرط مشاهده‌پذیری توأمان متغیرهای حالت و ورودی نامعلوم): سیستم خطی گسسـته زمان، بیان‌شده در معادلات (۳۲.۴) و (۳۳.۴)، **مشــاهده‌پذیر توأمــان متغیرهــای حالــت و ورودی نامعلوم** است؛ اگر و فقط اگر

$$\operatorname{rank}\left(\mathbf{O}_{\mathrm{nd}}\right) = \mathrm{n} + \mathrm{n}_{\mathrm{d}} \qquad (۴۷.۴)$$

و

$$\operatorname{rank}\left(\left[\mathbf{O}_{\mathrm{nd}} \quad \mathbf{W}'_{\mathbf{d}}\right]\right) = \mathrm{n} + \mathrm{n}_{\mathrm{d}} + \operatorname{rank}\left(\mathbf{W}'_{\mathbf{d}}\right) \qquad (۴۸.۴)$$

در رابطه فوق، $\mathbf{O}_{\mathrm{nd}}$ نشان‌دهنده ماتریس مشاهده‌پذیری توأمان متغیرهای حالـت و ورودی‌هـای نـامعلوم است؛ که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{O}_{\mathrm{nd}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D}_{\mathbf{d}} \\ \mathbf{CA} & \mathbf{CB}_{\mathbf{d}} \\ \mathbf{CA}^2 & \mathbf{CAB}_{\mathbf{d}} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{\mathrm{n}} & \mathbf{CA}^{\mathrm{n}-1}\mathbf{B}_{\mathbf{d}} \end{bmatrix} \qquad (۴۹.۴)$$

اثبات قضیه ۱۰ مرتبط با شرایط مشاهده‌پذیری توأمان متغیرهای حالت و ورودی‌هـای نـامعلوم، کـه توسط نگارنده انجام شده، در پیوست "ث" ارائه شده‌است.

۳.۴ تحلیل مشاهده‌پذیری سیستم‌های غیرخطی افاین پیوسته زمان

این بخش به تحلیل مشاهده‌پذیری متغیرهای حالت و ورودی‌های نامعلوم برای سیستم‌های غیرخطی افاین پیوسته زمان می‌پردازد. مدل فضای حالت یک سیستم غیرخطی در فرم افاین به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_{\mathbf{d}}(\mathbf{x})\mathbf{d} \tag{۵۰.۴}$$

در معادله فوق، $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ و $\mathbf{d} = \left[d_1 \dots d_{\mathrm{n_d}}\right]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n_d}}$ به‌ترتیب بیانگر متغیرهای حالت، ورودی‌های کنترلی و ورودی‌های نامعلوم هستند. همچنین، $\mathbf{f}$ و $\mathbf{g}_{\mathbf{d}}$ به‌ترتیب توابع غیرخطی معلوم مرتبط با متغیرهای حالت هستند. به علاوه، معادله اندازه‌گیری به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\mathbf{z} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \left[h_1(\mathbf{x}) \dots h_{\mathrm{p}}(\mathbf{x})\right]^{\mathrm{T}} \tag{۵۱.۴}$$

در معادله فوق، $\mathbf{h}$ تابع غیرخطی معلوم است. در ادامه، قضایای مرتبط با مشاهده‌پذیری متغیرهای حالت، مشاهده‌پذیری قوی، مشاهده‌پذیری ورودی‌های نامعلوم و مشاهده پذیری توأمان متغیرهای حالت و ورودی‌های نامعلوم برای یک سیستم غیرخطی پیوسته زمان ارائه می‌شود. لازم به ذکر است که اعتبارسنجی قضایای ارائه شده، در پیوست "ح" برای یک سیستم خطی و یک سیستم غیرخطی انجام شده‌است.

۱.۳.۴ تحلیل مشاهده‌پذیری متغیرهای حالت

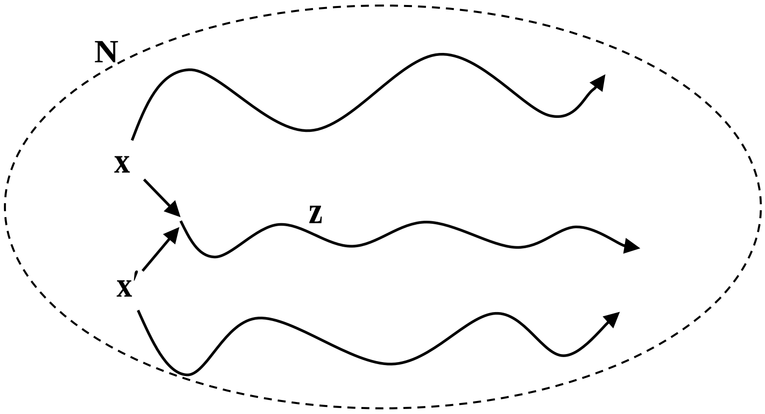
در این بخش، تئوری مشاهده‌پذیری متغیرهای حالت به‌منظور بازیابی متغیرهای حالت برای یک سیستم پیوسته غیرخطی افاین به‌صورت زیر بیان می‌شود [۹۹]-[۱۰۰]:

تعریف ۱۸: سیستم غیرخطی پیوسته افاین، بیان‌شده در معادلات (۵۰.۴) و (۵۱.۴)، **مشاهده‌پذیر محلی متغیر حالت** نامیده می‌شود؛ اگر بردار متغیر حالت $\mathbf{x}$ در هر همسایگی از مقدار اولیه $\mathbf{x}_0$ با استفاده از خروجی‌های $\mathbf{z}^{(i)}$ برای تمام $t \in [0, \tau]$ بازیابی شود [۹۹]. در اینجا، $\mathbf{z}^{(i)}$ بیانگر مشتق مرتبه i-ام خروجی $\mathbf{z}$ نسبت به زمان است.

تعریف ۱۹: متغیر حالت $\mathbf{x}$ **مشاهده‌پذیر محلی** نامیده می‌شود؛ اگر برای هر $\mathbf{x}'$ در همسایگی $\mathbf{N}$ از متغیر حالت $\mathbf{x}$ [۱۰۰]

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}') \neq \mathbf{z}(\mathbf{x}) \tag{۵۲.۴}$$

به عبارت دیگر، مجموعه تمامی نقاط $\mathbf{x}'$ در همسایگی $\mathbf{N}$ قابل تشخیص از $\mathbf{x}$ است. دو متغیر حالت غیرقابل تشخیص در شکل ۱.۴ نشان داده شده‌است.



شکل ۱.۴ دو متغیر حالت غیرقابل تشخیص.

قضیه ۱۱ (شرط مشاهده‌پذیری محلی متغیرحالت): سیستم غیرخطی پیوسته افاین، بیان‌شده در معادلات (۵۰.۴) و (۵۱.۴)، در نقطه $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{X}$ برای هر همسایگی $\mathbf{N}$ از $\mathbf{x}_0$ **مشاهده‌پذیر محلی متغیرحالت** است؛ اگر مرتبه ماتریس مشاهده‌پذیری

$$\mathbf{O}_n(\mathbf{x}_0) = \left.\frac{\partial \mathbf{l}_n(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \tag{۵۳.۴}$$

کامل باشد [۱۰۱]- [۱۰۲]. در رابطه فوق، $\mathbf{l}_n$ بیانگر مشتق لی بردار خروجی نسبت به $\mathbf{f}$ است؛ که به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\mathbf{l}_n(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} L_{\mathbf{f}}^{0}(\mathbf{h}(\mathbf{x})) \\ L_{\mathbf{f}}^{1}(\mathbf{h}(\mathbf{x})) \\ \dots \\ L_{\mathbf{f}}^{n-1}(\mathbf{h}(\mathbf{x})) \end{bmatrix} \tag{۵۴.۴}$$

اثبات قضیه ۱۱ مرتبط با شرایط مشاهده‌پذیری متغیرهای حالت یک سیستم غیرخطی افاین پیوسته در پیوست "چ" بیان شده‌است.

۲.۳.۴ تحلیل مشاهده‌پذیری قوی

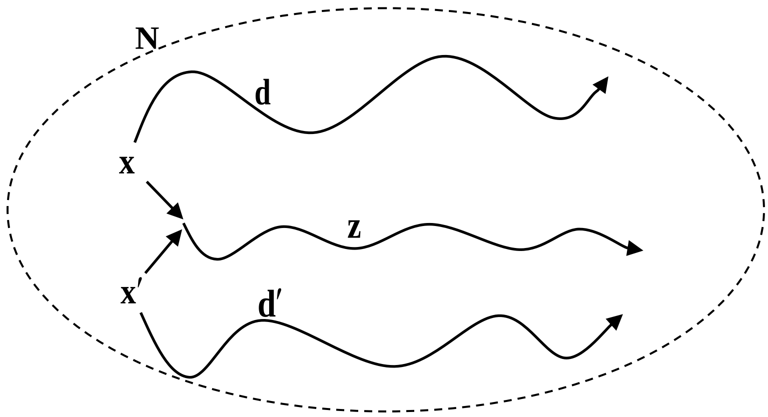
در این بخش، دو تعریف و یک قضیه به‌منظور تحلیل مشاهده‌پذیری قوی برای سیستم‌های پیوسته غیرخطی افاین بیان می‌شود.

تعریف ۲۰: سیستم غیرخطی پیوسته افاین، بیان‌شده در معادلات (۵۰.۴) و (۵۱.۴)، **مشاهده‌پذیر محلی قوی** نامیده می‌شود؛ اگر بردار متغیر حالت $\mathbf{x}$ در هر همسایگی از مقدار اولیه $\mathbf{x}_0$ با استفاده از خروجی‌های $\mathbf{z}^{(i)}$ به‌ازای هر $\mathbf{x}_0$ و هر $\mathbf{d}^{(i)}$ و برای تمام $t \in [0,\tau]$ قابل بازیابی باشد. اینجا، $\mathbf{d}^{(i)}$ بیانگر مشتق مرتبه i-ام ورودی‌های نامعلوم $\mathbf{d}$ نسبت به زمان است.

تعریف ۲۱: متغیر حالت $\mathbf{x}$ **مشاهده‌پذیر محلی قوی** نامیده می‌شود؛ اگر برای هر $\mathbf{x}'$ در همسایگی $\mathbf{N}$ از متغیر حالت $\mathbf{x}$ و هر ورودی نامعلوم $\mathbf{d}'$ و $\mathbf{d}$ [۱۰۳]

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}',\mathbf{d}') \neq \mathbf{z}(\mathbf{x},\mathbf{d}) \qquad (۵۵.۴)$$

به عبارت دیگر، مجموعه تمامی نقاط $\mathbf{x}'$ در همسایگی $\mathbf{N}$ به‌ازای هر ورودی نامعلوم قابل تشخیص از $\mathbf{x}$ است. دو متغیر حالت غیرقابل تشخیص در حضور دو ورودی نامعلوم در شکل ۲.۴ نشان داده شده‌است.



شکل ۲.۴ دو متغیر حالت غیرقابل تشخیص در حضور دو ورودی نامعلوم.

قضیه ۱۲ (شرط مشاهده‌پذیری محلی قوی): سیستم غیرخطی پیوسته افاین، بیان‌شده در معـادلات (۵۰.۴) و (۵۱.۴)، در هر همسایگی $\mathbf{N}$ از $\mathbf{x}_0$ **مشاهده‌پذیر محلی قوی** است؛ اگر

$$\operatorname{rank}\left(\mathbf{O}_{\mathrm{n}}(\mathbf{x}_0)\right) = \mathrm{n} \tag{۵۶.۴}$$

و

$$\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix}\mathbf{O}_{\mathrm{n}} & \mathbf{W}_{\mathbf{d}}\end{bmatrix}\right)\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} = \mathrm{n} + \operatorname{rank}\left(\mathbf{W}_{\mathbf{d}}(\mathbf{x}_0)\right) \tag{۵۷.۴}$$

در رابطه فوق، n بیانگر تعداد متغیر حالت است. همچنین، $\mathbf{W}_{\mathbf{d}}$ ماتریس معکوس‌پـذیری ورودی نـامعلوم است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

(۵۸.۴)

$$\mathbf{W}_{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ L^1_{\mathbf{g}_{\mathbf{d}}}(\mathbf{h}) & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ L^1_{\mathbf{g}_{\mathbf{d}}}L^1_{\mathbf{f}}(\mathbf{h}) + \dfrac{\partial L^1_{\mathbf{f}}L^1_{\mathbf{g}_{\mathbf{d}}}(\mathbf{hd})}{\partial \mathbf{d}} & L^1_{\mathbf{g}_{\mathbf{d}}}(\mathbf{h}) & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{j=0}^{\mathrm{n}-3} L^j_{\mathbf{f}}L^1_{\mathbf{g}_{\mathbf{d}}}L_{\mathbf{f}}^{\mathrm{n}-(j+2)}(\mathbf{h}) + \dfrac{\partial L_{\mathbf{f}}^{\mathrm{n}-2}L^1_{\mathbf{g}_{\mathbf{d}}}(\mathbf{hd})}{\partial \mathbf{d}} & \cdots & \cdots & \sum_{j=0}^{\mathrm{n}-(m+3)} \dfrac{(j+m)!}{j!\,m!} L^j_{\mathbf{f}}L^1_{\mathbf{g}_{\mathbf{d}}}L_{\mathbf{f}}^{\mathrm{n}-(m+2+j)}(\mathbf{h}) + \dfrac{(\mathrm{n}-2)!}{\left(\mathrm{n}-(m+2)\right)!\,m!}\dfrac{\partial L_{\mathbf{f}}^{\mathrm{n}-(m+2)}L^1_{\mathbf{g}_{\mathbf{d}}}(\mathbf{hd}^{(m)})}{\partial \mathbf{d}^{(m)}} & \cdots & L^1_{\mathbf{g}_{\mathbf{d}}}(\mathbf{h}) & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

در رابطه فوق، $m = 0,\ldots,\mathrm{n}-2$ است.

اثبات قضیه ۱۲ مرتبط با شرایط مشاهده‌پذیری قوی یک سیستم غیرخطی افاین پیوسته، که توسط نگارنده انجام شده، در پیوست "ج" ارائه شده‌است.

۳.۳.۴ تحلیل مشاهده‌پذیری ورودی نامعلوم

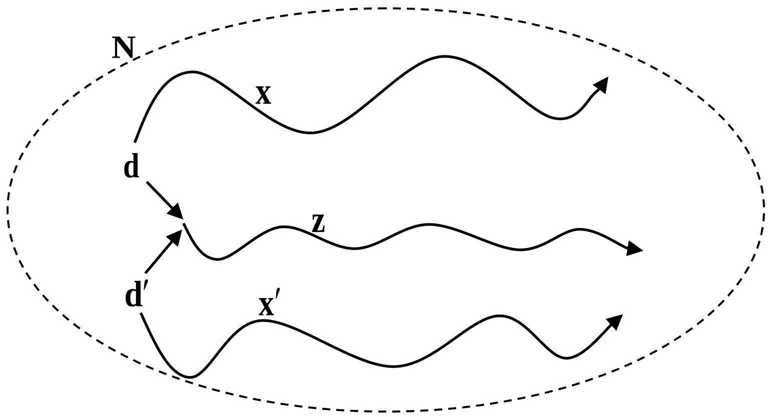
در این بخش، مشاهده‌پذیری ورودی‌های نامعلوم تعریف و یک شرط بـه منظـور تحلیـل مشـاهده‌پذیری ورودی نامعلوم برای سیستم پیوسته غیرخطی افاین معرفی می‌شود.

تعریف ۲۲: سیستم غیرخطی پیوسته افاین، بیان‌شده در معادلات (۵۰.۴) و (۵۱.۴)، **مشاهده‌پذیر محلی ورودی نامعلوم** نامیده می‌شود؛ اگر بردار ورودی نامعلوم $\mathbf{d}$ در هر همسایگی $\mathbf{N}$ از مقدار اولیه ورودی نامعلوم $\mathbf{d}_0$ با استفاده از $\mathbf{z}^{(i)}$ و $\mathbf{x}_0$ برای هر $\mathbf{d}^{(i+1)}$ و برای تمام $t \in [0,\tau]$ قابل بازیابی باشد.

تعریف ۲۳: بردار ورودی نامعلوم $\mathbf{d}$ **مشاهده‌پذیر محلی** نامیده می‌شود؛ اگر برای هر بردار ورودی نامعلوم $\mathbf{d}'$ در همسایگی $\mathbf{N}$ از $\mathbf{d}$ و هر متغیر حالت $\mathbf{x}'$ و $\mathbf{x}$

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}',\mathbf{d}') \neq \mathbf{z}(\mathbf{x},\mathbf{d}) \qquad (۵۹.۴)$$

به عبارت دیگر، مجموعه تمامی نقاط $\mathbf{d}'$ در همسایگی $\mathbf{N}$ به‌ازای هر متغیر حالت قابل تشخیص از $\mathbf{d}$ است. دو ورودی نامعلوم غیرقابل تشخیص در شکل ۳.۴ نشان داده شده‌است.



شکل ۳.۴ دو ورودی نامعلوم غیرقابل تشخیص.

قضیه ۱۳ (شرط مشاهده‌پذیری محلی ورودی نامعلوم): سیستم غیرخطی پیوسته افاین، بیان‌شده در معادلات (۵۰.۴) و (۵۱.۴)، در نطقه $\mathbf{d}_0 \in \mathbf{D}$ برای هر همسایگی $\mathbf{N}$ از $\mathbf{d}_0$ **مشاهده‌پذیر محلی ورودی نامعلوم** است؛ اگر

$$\mathrm{rank}\left(\mathbf{O}_{\mathrm{d}}(\mathbf{d}_0)\right) = \mathrm{n}_{\mathrm{d}} \qquad (۶۰.۴)$$

و

$$\operatorname{rank}\left(\mathbf{W}_{\mathbf{d}}\right)\Big|_{\mathbf{d}=\mathbf{d}_0} = \mathrm{n}_{\mathrm{d}} + \operatorname{rank}\left(\mathbf{W}'_{\mathbf{d}}(\mathbf{d}_0)\right) \tag{۶۱.۴}$$

در رابطه فوق، n_{d} بیانگر تعداد بردار ورودی‌های نامعلوم است. همچنین، $\mathbf{O}_{\mathbf{d}}$ ماتریس مشاهده‌پذیری ورودی‌های نامعلوم است که به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\mathbf{O}_{\mathrm{d}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ L^1_{\mathbf{g}_\mathbf{d}}(\mathbf{h}) \\ L^1_{\mathbf{g}_\mathbf{d}} L^1_{\mathbf{f}}(\mathbf{h}) + \dfrac{\partial L^1_{\mathbf{f}} L^1_{\mathbf{g}_\mathbf{d}}(\mathbf{hd})}{\partial \mathbf{d}} \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=0}^{\mathrm{n}-2} L^j_{\mathbf{f}} L^1_{\mathbf{g}_\mathbf{d}} L^{\mathrm{n}-(j+1)}_{\mathbf{f}}(\mathbf{h}) + \dfrac{\partial L^{\mathrm{n}-1}_{\mathbf{f}} L^1_{\mathbf{g}_\mathbf{d}}(\mathbf{hd})}{\partial \mathbf{d}} \end{bmatrix} \tag{۶۲.۴}$$

و $\mathbf{W}'_{\mathbf{d}}$ بیانگر ماتریس معکوس‌پذیری ورودی‌های نامعلوم مرتبط با مشتق زمانی اول تا مشتق n-ام ورودی نامعلوم $\mathbf{d}$ است؛ که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

(۶۳.۴)

$$\mathbf{W}'_{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ L^1_{\mathbf{g}_\mathbf{d}}(\mathbf{h}) & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \sum\limits_{j=0}^{\mathrm{n}-3}(j+1) L^j_{\mathbf{f}} L^1_{\mathbf{g}_\mathbf{d}} L^{\mathrm{n}-(j+2)}_{\mathbf{f}}(\mathbf{h}) + (\mathrm{n}-1)\dfrac{\partial L^{\mathrm{n}-2}_{\mathbf{f}} L^1_{\mathbf{g}_\mathbf{d}}(\mathbf{hd}^{(1)})}{\partial \mathbf{d}^{(1)}} & \cdots & \sum\limits_{j=0}^{\mathrm{n}-(m+2)} \dfrac{(j+m)!}{j!\,m!} L^j_{\mathbf{f}} L^1_{\mathbf{g}_\mathbf{d}} L^{\mathrm{n}-(m+1+j)}_{\mathbf{f}}(\mathbf{h}) + \dfrac{(\mathrm{n}-1)!}{(\mathrm{n}-(m+1))!\,m!} \dfrac{\partial L^{\mathrm{n}-(m+1)}_{\mathbf{f}} L^1_{\mathbf{g}_\mathbf{d}}(\mathbf{hd}^{(m)})}{\partial \mathbf{d}^{(m)}} & \cdots & L^1_{\mathbf{g}_\mathbf{d}}(\mathbf{h}) & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

در رابطه فوق، $m = 0,\ldots,\mathrm{n}-1$ است.

اثبات قضیه ۱۳ مرتبط با شرایط مشاهده‌پذیری ورودی‌های نامعلوم یک سیستم غیرخطی افاین پیوسته، که توسط نگارنده انجام شده، در پیوست "ج" ارائه شده‌است.

۴.۳.۴ تحلیل مشاهده‌پذیری توأمان متغیرهای حالت و ورودی نامعلوم

در این بخش، مشاهده‌پذیری توأمان متغیرهای حالت و ورودی‌های نامعلوم و یک شرط مرتبط با آن برای سیستم‌های پیوسته غیرخطی افاین بیان می‌شود.

تعریف ۲۴: سیستم غیرخطی پیوسته افاین، بیان‌شده در معادلات (۵۰.۴) و (۵۱.۴)، **مشاهده‌پذیر توأمان محلی متغیر حالت و ورودی نامعلوم** نامیده می‌شود؛ اگر بردار متغیر حالت افزونه $\mathbf{x}_a = \left[\mathbf{x}^T \quad \mathbf{d}^T\right]^T$ در هر همسایگی از مقدار اولیه $\mathbf{x}_{a_0} = \left[\mathbf{x}_0^T \quad \mathbf{d}_0^T\right]^T$ با استفاده از خروجی‌های $\mathbf{z}_t^{(i)}$ به‌ازای هر متغیر حالت افزونه $\mathbf{x}_{a_0}$ و هر ورودی نامعلوم $\mathbf{d}^{(i+1)}$ و برای تمام $t \in [0, \tau]$ بازیابی شود.

تعریف ۲۵: متغیرهای حالت و ورودی‌های نامعلوم **مشاهده‌پذیر محلی توأمان** نامیده می‌شوند؛ اگر برای هر متغیر حالت افزونه $\mathbf{x}_a'$ در همسایگی $\mathbf{N}$ از متغیر حالت افزونه $\mathbf{x}_a$

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}_a') \neq \mathbf{z}(\mathbf{x}_a) \qquad (۶۴.۴)$$

به عبارت دیگر، مجموعه تمامی نقاط $\mathbf{x}_a'$ در همسایگی $\mathbf{N}$ قابل تشخیص از $\mathbf{x}_a$ است. دو متغیر حالت افزونه غیرقابل تشخیص در شکل ۴.۴ نشان داده شده‌است.

قضیه ۱۴ (شرط مشاهده‌پذیری محلی توأمان متغیرهای حالت و ورودی‌های نامعلوم): سیستم غیرخطی پیوسته افاین، بیان‌شده در معادلات (۵۰.۴) و (۵۱.۴)، در نقطه $\mathbf{x}_{a_0} \in \left[\mathbf{x}_0 \quad \mathbf{d}_0\right]$ به‌ازای هر همسایگی $\mathbf{N}$ از $\mathbf{x}_{a_0}$ **مشاهده‌پذیر محلی توأمان متغیرهای حالت و ورودی‌های نامعلوم** است؛ اگر

$$\operatorname{rank}\left(\mathbf{O}_{nd}(\mathbf{x}_{a_0})\right) = n + n_d \qquad (۶۵.۴)$$

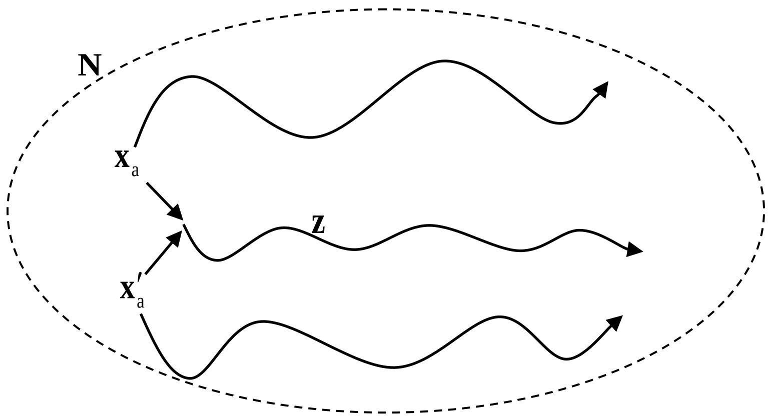
و

$$\operatorname{rank}\left(\left[\mathbf{O}_{nd} \quad \mathbf{W}_\mathbf{d}'\right]\right)\Big|_{\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_{a_0}} = n + n_d + \operatorname{rank}\left(\mathbf{W}_\mathbf{d}'(\mathbf{x}_{a_0})\right) \qquad (۶۶.۴)$$

در روابط فوق، $\mathbf{O}_{nd}$ ماتریس مشاهده‌پذیری توأمان متغیرهای حالت و ورودی‌های نامعلوم است؛ که به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\mathbf{O}_{\mathrm{nd}} = \begin{bmatrix} \left.\dfrac{\partial L_{\mathbf{f}}^{0}(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} & \mathbf{0} \\ \left.\dfrac{\partial L_{\mathbf{f}}^{1}(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} & L_{\mathbf{g}_{\mathbf{d}}}^{1}(\mathbf{h}) \\ \left.\dfrac{\partial L_{\mathbf{f}}^{2}(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} & L_{\mathbf{g}_{\mathbf{d}}}^{1} L_{\mathbf{f}}^{1}(\mathbf{h}) + \dfrac{\partial L_{\mathbf{f}}^{1} L_{\mathbf{g}_{\mathbf{d}}}^{1}(\mathbf{hd})}{\partial \mathbf{d}} \\ \vdots & \vdots \\ \left.\dfrac{\partial L_{\mathbf{f}}^{\mathrm{n}}(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} & \displaystyle\sum_{j=0}^{\mathrm{n}-2} L_{\mathbf{f}}^{j} L_{\mathbf{g}_{\mathbf{d}}}^{1} L_{\mathbf{f}}^{\mathrm{n}-(j+1)}(\mathbf{h}) + \dfrac{\partial L_{\mathbf{f}}^{\mathrm{n}-1} L_{\mathbf{g}_{\mathbf{d}}}^{1}(\mathbf{hd})}{\partial \mathbf{d}} \end{bmatrix} \qquad (۶۷.۴)$$

اثبات قضیه ۱۴ مرتبط با شرایط مشاهده‌پذیری توأمان متغیرهای حالت و ورودی‌های نـامعلوم یـک سیستم غیرخطی افاین پیوسته، که توسط نگارنده انجام شده، در پیوست "ج" ارائه شده‌است.



شکل ۴.۴ دو متغیر حالت افزونه غیرقابل تشخیص.

۴.۴ تحلیل مشاهده‌پذیری پرنده

این بخش به تحلیل مشاهده‌پذیری پرنده بدون سرنشین بر مبنای متغیرهای حالت و خروجی‌های پرنده، که در فصل ۳ بیان شده‌است، می‌پردازد. به این‌منظـور، ابتـدا در بخـش ۱.۴.۴ مشـاهده‌پذیری معـادلات پیوسته زمان کانال طولی پرنده بر مبنای قضایای مشاهده‌پذیری سیستم‌های خطی پیوسته زمان، که در بخش ۱.۴ بیـان شـد، بررسـی می‌شـود. سـپس، در بخـش ۲.۴.۴ بـه تحلیـل مشـاهده‌پذیری معـادلات شش‌درجه‌آزادی گسسته زمان پرنده بر مبنای قضایای بیان‌شده در بخش ۲.۴ پرداخته می‌شود.

۱.۴.۴ تحلیل مشاهده‌پذیری معادلات پیوسته-زمان پرنده

مدل خطی پیوسته زمان پرنده بدون سرنشین در فضای حالت بر طبق معادله (۲۴.۳) به‌صورت زیر بیان می‌شود [۱۰۴]-[۱۰۵]:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\text{lon}} & \mathbf{A}_{\text{lon-lat}} \\ \mathbf{A}_{\text{lat-lon}} & \mathbf{A}_{\text{lat}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\text{lon}} \\ \mathbf{x}_{\text{lat}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\text{lon}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{\text{lat}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_{\text{lon}} \\ \boldsymbol{\delta}_{\text{lat}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\mathbf{d}_{\text{lon}}} & \mathbf{B}_{\mathbf{d}_{\text{lon-lat}}} \\ \mathbf{B}_{\mathbf{d}_{\text{lat-lon}}} & \mathbf{B}_{\mathbf{d}_{\text{lat}}} \end{bmatrix} \mathbf{C}_{\mathbf{N}}^{\mathbf{B}} \mathbf{d} \qquad (۶۸.۴)$$

در رابطه فوق، $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} u_{\text{w}}^{\text{N}} & v_{\text{w}}^{\text{N}} & w_{\text{w}}^{\text{N}} \end{bmatrix}^{\text{T}}$ بیانگر بردار سرعت باد در سیستم مختصات جغرافیایی هستند. $\mathbf{C}_{\mathbf{N}}^{\mathbf{B}}$ نشان‌دهنده ماتریس تبدیل دستگاه مختصات بدنی به دستگاه مختصات ناوبری است، که در صفحه قائم به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\mathbf{C}_{\mathbf{N}}^{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \cos\theta_0 \cos\psi_0 & \cos\theta_0 \sin\psi_0 & -\sin\theta_0 \\ \sin\phi_0 \sin\theta_0 \cos\psi_0 - \cos\phi_0 \sin\psi_0 & \sin\phi_0 \sin\theta_0 \sin\psi_0 + \cos\phi_0 \cos\psi_0 & \sin\phi_0 \cos\theta_0 \\ \cos\phi_0 \sin\theta_0 \cos\psi_0 + \sin\phi_0 \sin\psi_0 & \cos\phi_0 \sin\theta_0 \sin\psi_0 - \sin\phi_0 \cos\psi_0 & \cos\phi_0 \cos\theta_0 \end{bmatrix} \quad (۶۹.۴)$$

در رابطه فوق، ϕ_0، θ_0 و ψ_0 به‌ترتیب زوایای رول، پیچ و یاو پرنده در نقطه کاری، که خطی‌سازی حول آن انجام می‌شود، است. به‌منظور بررسی مشاهده‌پذیری متغیرهای حالت، باید شرط مشاهده‌پذیری متغیرهای حالت در فضای خطی پیوسته زمان مطابق با قضیه ۱، که در بخش ۱.۱.۴ بیان شد، بررسی شود. در این حالت، رتبه ماتریس مشاهده‌پذیری ($\mathbf{O}_{\text{n}}$) کامل است؛ بنابراین، متغیرهای حالت پرنده مشاهده‌پذیر هستند. در گام بعد، باید ارتباط بین ماتریس‌های مشاهده‌پذیری و معکوس‌پذیری برای تحلیل مشاهده‌پذیری قوی بر مبنای قضیه ۲، که در بخش ۲.۱.۴ بیان شده‌است، بررسی شود. از آنجا که شرط $\text{rank}([\mathbf{O}_{\text{n}} \quad \mathbf{W}_{\mathbf{d}}])-\text{rank}(\mathbf{W}_{\mathbf{d}})=12$ برقرار است؛ پس مسئله مشاهده‌پذیر قوی است. به عبارت دیگر، متغیرهای حالت پرنده به‌ازای تمام مدل‌های باد قابل بازیابی هستند.

همچنین، به‌منظور بررسی مشاهده‌پذیری مولفه‌های سرعت باد، شرط مشاهده‌پذیری ورودی‌های نامعلوم برطبق قضیه ۳، که در بخش ۳.۱.۴ بیان شده‌است، باید بررسی شود. از آنجاکه، رتبه ماتریس مشاهده‌پذیری ورودی‌های نامعلوم ($\mathbf{O}_{\mathbf{d}}$) کامل و شرط $\text{rank}\left(\mathbf{W}_{\mathbf{d}}\right) - \text{rank}\left(\mathbf{W}_{\mathbf{d}}'\right) = 3$ برقرار است؛ پس مولفه‌های باد می‌تواند از خروجی‌های سیستم بازیابی شوند. به‌علاوه، از آنجا که رتبه ستونی ماتریس $\mathbf{O}_{\text{nd}}$

کامل و شرط $\mathrm{rank}([\mathbf{O}_{\mathrm{nd}} \quad \mathbf{W}'_{\mathbf{d}}])-\mathrm{rank}(\mathbf{W}'_{\mathbf{d}})=15$ برقرار است؛ بنابراین، بر اساس قضیه ۴، که در بخش ۴.۱.۴ بیان شد، متغیرهای حالت پرنده و ورودی‌های نامعلوم می‌تواند به‌صورت همزمان بازیابی شوند.

به‌منظور تحلیل مشاهده‌پذیری متغیرهای حالت پرنده در حضور خطاهای خطی‌سازی، ارتباط بین ماتریس مشاهده‌پذیری و ماتریس خطای خطی‌سازی باید ارزیابی شود. از آنجاکه، رتبه ماتریس مشاهده‌پذیری متغیرهای حالت ($\mathbf{O}_{\mathrm{n}}$) کامل و شرط $\mathrm{rank}\left(\left[\mathbf{O}_{\mathrm{n}} \quad \mathbf{E}_{\mathrm{n}}\right]\right)-\mathrm{rank}\left(\mathbf{E}_{\mathrm{n}}\right)=12=\mathrm{n}$ برقرار است؛ پس، بر اساس قضیه ۵، که در بخش ۵.۱.۴ بیان شد، متغیرهای حالت پرنده در حضور خطاهای خطی‌سازی قابل بازیابی هستند.

در نهایت، به منظور بررسی مشاهده‌پذیری بردار سرعت باد در حضور ماتریس متغیر با زمان ورودی‌های نامعلوم، ارتباط بین ماتریسهای $\mathbf{O}_{\mathbf{d}}(t)$ و $\mathbf{W}'_{\mathbf{d}}(t)$ باید ارزیابی شود. از آنجاکه، رتبه ماتریس متغیر با زمان ورودی‌های نامعلوم ($\mathbf{O}_{\mathbf{d}}(t)$) کامل و شرط $\mathrm{rank}\left(\left[\mathbf{O}_{\mathbf{d}}(t) \quad \mathbf{W}'_{\mathbf{d}}(t)\right]\right)-\mathrm{rank}\left(\mathbf{W}'_{\mathbf{d}}(t)\right)=3=\mathrm{n}_{\mathrm{d}}$ برقرار است؛ پس، بر اساس قضیه ۶، که در بخش ۶.۱.۴ بیان شد، بردار سرعت باد در حین تغییر نقطه کار (تغییر وضعیت پرنده) قابل بازیابی است.

۲.۴.۴ تحلیل مشاهده‌پذیری معادلات گسسته-زمان پرنده

به‌منظور تحلیل مشاهده‌پذیری، ابتدا مدل فضای حالت خطی پرنده با خطی‌سازی معادلات (۱.۳) تا (۴.۳) پیرامون یک نقطه کاری به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{x}_{\mathrm{lon}_{k+1}}\\ \mathbf{x}_{\mathrm{lat}_{k+1}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{\mathrm{lon}} & \mathbf{A}_{\mathrm{lon\text{-}lat}}\\ \mathbf{A}_{\mathrm{lat\text{-}lon}} & \mathbf{A}_{\mathrm{lat}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_{\mathrm{lon}_k}\\ \mathbf{x}_{\mathrm{lat}_k}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{B}_{\mathrm{lon}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{\mathrm{lat}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{lon}_k}\\ \boldsymbol{\delta}_{\mathrm{lat}_k}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{B}_{\mathbf{d}_{\mathrm{lon}}} & \mathbf{B}_{\mathbf{d}_{\mathrm{lon\text{-}lat}}}\\ \mathbf{B}_{\mathbf{d}_{\mathrm{lat\text{-}lon}}} & \mathbf{B}_{\mathbf{d}_{\mathrm{lat}}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{d}_{\mathrm{lon}_k}\\ \mathbf{d}_{\mathrm{lat}_k}\end{bmatrix} \quad (۷۰.۴)$$

در رابطه فوق، $\mathbf{x}_{\mathrm{lon}_k}=\begin{bmatrix}u_k & w_k & q_k & \theta_k & h_k & p_{n_k}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$، $\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{lon}_k}=[\delta_{\mathrm{e}} \quad \delta_{\mathrm{t}}]^{\mathrm{T}}$ و $\mathbf{d}_{\mathrm{lon}_k}=[u_{\mathrm{w}} \quad w_{\mathrm{w}}]^{\mathrm{T}}$ به‌ترتیب بیانگر بردار متغیر حالت طولی، بردار ورودی و بردار سرعت باد طولی بیان‌شده در دستگاه مختصات بدنی هستند. همچنین، $\mathbf{x}_{\mathrm{lat}_k}=\begin{bmatrix}v_k & p_k & r_k & \phi_k & \psi_k & p_{e_k}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$، $\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{lat}_k}=[\delta_{\mathrm{a}} \quad \delta_{\mathrm{r}}]^{\mathrm{T}}$ و $\mathbf{d}_{\mathrm{lat}_k}=v_{\mathrm{w}}$ به‌ترتیب بیانگر بردار متغیر حالت عرضی، بردار ورودی و بردار سرعت

باد عرضی بیان‌شده در دستگاه مختصات بدنی هستند. ماتریس‌های سیستم برای هر دو حرکت طولی و عرضی به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\mathbf{A}_{\mathrm{lon}}=\begin{bmatrix} 1+\mathrm{T_s X}_u & \mathrm{T_s X}_w & \mathrm{T_s X}_q & \mathrm{T_s X}_\theta & 0 & 0 \\ \mathrm{T_s Z}_u & 1+\mathrm{T_s Z}_w & \mathrm{T_s Z}_q & \mathrm{T_s Z}_\theta & 0 & 0 \\ \mathrm{T_s M}_u & \mathrm{T_s M}_w & 1+\mathrm{T_s M}_q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{T_s}\Theta_q & 1 & 0 & 0 \\ \mathrm{T_s H}_u & \mathrm{T_s H}_w & 0 & \mathrm{T_s H}_\theta & 1 & 0 \\ \mathrm{T_s P}_{n_u} & \mathrm{T_s P}_{n_w} & 0 & \mathrm{T_s P}_{\mathrm{n}_\theta} & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (۷۱.۴)$$

$$\mathbf{A}_{\mathrm{lat}}=\begin{bmatrix} 1+\mathrm{T_s Y}_v & \mathrm{T_s Y}_p & \mathrm{T_s Y}_r & \mathrm{T_s Y}_\phi & 0 & 0 \\ \mathrm{T_s L}_v & 1+\mathrm{T_s L}_p & \mathrm{T_s L}_r & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{T_s N}_v & \mathrm{T_s N}_p & 1+\mathrm{T_s N}_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{T_s} & \mathrm{T_s}\Phi_r & 1+\mathrm{T_s}\Phi_\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{T_s}\Psi_r & \mathrm{T_s}\Psi_\phi & 1 & 0 \\ \mathrm{T_s P}_{e_v} & 0 & 0 & \mathrm{T_s P}_{\mathrm{e}_\phi} & \mathrm{T_s P}_{e_\psi} & 1 \end{bmatrix} \qquad (۷۲.۴)$$

$$\mathbf{A}_{\mathrm{lon\text{-}lat}}=\begin{bmatrix} \mathrm{T_s X}_v & 0 & \mathrm{T_s X}_r & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{T_s Z}_v & \mathrm{T_s Z}_p & 0 & \mathrm{T_s Z}_\phi & 0 & 0 \\ \mathrm{T_s M}_v & \mathrm{T_s M}_p & \mathrm{T_s M_r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{T_s}\Theta_r & \mathrm{T_s}\Theta_\phi & 0 & 0 \\ \mathrm{T_s H}_v & 0 & 0 & \mathrm{T_s H}_\phi & 0 & 0 \\ \mathrm{T_s P}_{n_v} & 0 & 0 & \mathrm{T_s P}_{n_\phi} & \mathrm{T_s P}_{n_\psi} & 0 \end{bmatrix} \qquad (۷۳.۴)$$

$$\mathbf{A}_{\mathrm{lat\text{-}lon}}=\begin{bmatrix} \mathrm{T_s Y}_u & \mathrm{T_s Y}_w & 0 & \mathrm{T_s\, Y}_\theta & 0 & 0 \\ \mathrm{T_s L}_u & \mathrm{T_s L}_w & \mathrm{T_s L}_q & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{T_s N}_u & \mathrm{T_s N}_w & \mathrm{T_s N}_q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{T_s}\Phi_q & \mathrm{T_s}\Phi_\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{T_s}\Psi_q & \mathrm{T_s}\Psi_\theta & 0 & 0 \\ \mathrm{T_s P}_{e_u} & \mathrm{T_s P}_{e_w} & 0 & \mathrm{T_s P}_{e_\theta} & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (۷۴.۴)$$

همچنین، ماتریس‌های ورودی به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\mathbf{B}_{\mathrm{lon}}=\begin{bmatrix}\mathrm{T_sX}_{\delta_\mathrm{e}} & \mathrm{T_sX}_{\delta_\mathrm{t}}\\ \mathrm{T_sZ}_{\delta_\mathrm{e}} & 0\\ \mathrm{T_sM}_{\delta_\mathrm{e}} & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix};\mathbf{B}_{\mathrm{lat}}=\begin{bmatrix}\mathrm{T_sY}_{\delta_\mathrm{a}} & \mathrm{T_sY}_{\delta_\mathrm{r}}\\ \mathrm{T_sL}_{\delta_\mathrm{a}} & \mathrm{T_sL}_{\delta_\mathrm{r}}\\ \mathrm{T_sN}_{\delta_\mathrm{a}} & \mathrm{T_sN}_{\delta_\mathrm{r}}\\ 0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \qquad (۷۵.۴)$$

و ماتریس‌های ورودی‌های نامعلوم پرنده به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\mathbf{B}_{\mathbf{d}_{\mathrm{lon}}}=\begin{bmatrix}-\mathrm{T_sX}_u & -\mathrm{T_s}\left(\mathrm{X}_w+q\right)\\ -\mathrm{T_s}\left(\mathrm{Z}_u-q\right) & -\mathrm{T_sZ}_w\\ -\mathrm{T_sM}_u & -\mathrm{T_sM}_w\\ 0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix};\mathbf{B}_{\mathbf{d}_{\mathrm{lat}}}=\begin{bmatrix}-\mathrm{T_sY}_v\\ -\mathrm{T_sL}_v\\ -\mathrm{T_sN}_v\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \qquad (۷۶.۴)$$

$$\mathbf{B}_{\mathbf{d}_{\mathrm{lon\text{-}lat}}}=\begin{bmatrix}-\mathrm{T_s}\left(\mathrm{X}_v-r\right)\\ -\mathrm{T_s}\left(\mathrm{Z}_v+p\right)\\ -\mathrm{T_sM}_v\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix};\mathbf{B}_{\mathbf{d}_{\mathrm{lat\text{-}lon}}}=\begin{bmatrix}-\mathrm{T_s}\left(\mathrm{Y}_u+r\right) & -\mathrm{T_s}\left(\mathrm{Y}_w-p\right)\\ -\mathrm{T_sL}_u & -\mathrm{T_sL}_w\\ -\mathrm{T_sN}_u & -\mathrm{T_sN}_w\\ 0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \qquad (۷۷.۴)$$

در رابطه فوق، $\mathrm{T_s}$ زمان نمونه‌برداری است. همچنین، خروجی‌های خطی‌شده به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\mathbf{z}_k=\begin{bmatrix}p_{n_k} & p_{e_k} & h_k & u_k & v_k & w_k & p_k & q_k & r_k & \psi_k\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \qquad (۷۸.۴)$$

به‌منظور تحلیل مشاهده‌پذیری متغیرهای حالت پرنده بدون سرنشین در حالت گسسته زمان، باید رتبه ماتریس مشاهده‌پذیری متغیرهای حالت، مطابق با قضیه ۷، که در بخش ۱.۲.۴ بیان شد، بررسی شود. از اجرای کد Matlab، نتیجه می‌شود که رتبه ماتریس $\mathbf{O}_{\mathrm{n}}$ کامل است. بنابراین، متغیرهای حالت پرنده مشاهده‌پذیر هستند.

سپس، باید ارتباط بین ماتریس‌های مشاهده‌پذیری و معکوس‌پذیری به‌منظور تحلیل مشاهده‌پذیری قوی بر اساس قضیه ۸، که در بخش ۲.۲.۴ بیان شد، بررسی شود. اجرای کد Matlab نشان می‌دهد که

$\mathrm{rank}\left(\left[\mathbf{O}_{\mathrm{n}} \quad \mathbf{W}_{\mathbf{d}}\right]\right)-\mathrm{rank}\left(\mathbf{W}_{\mathbf{d}}\right)=12$ است. بنابراین، سیستم مشاهده‌پذیر قوی است. به‌عبارت دیگر، متغیرهای حالت پرنده به‌ازای تمام مدل‌های باد قابل بازیابی هستند.

همچنین، کد Matlab که بر اساس قضیه ۹ بیان‌شده در بخش ۳.۲.۴ نوشته شده‌است، مشاهده‌پذیری مولفه‌های سرعت باد را تحلیل می‌کند. با اجرای این کد، رتبه ستونی $\mathbf{O}_{\mathrm{d}}$ کامل و شرط $\mathrm{rank}\left(\mathbf{W}_{\mathbf{d}}\right)-\mathrm{rank}\left(\mathbf{W}_{\mathbf{d}}'\right)=3$ برقرار است. بنابراین، مولفه‌های سرعت باد با استفاده از خروجی‌های سیستم قابل بازیابی هستند.

در نهایت، کد Matlab به‌منظور تحلیل توأمان مشاهده‌پذیری متغیرهای حالت و ورودی‌های نامعلوم، که بر اساس قضیه ۱۰ بیان‌شده، در بخش ۴.۲.۴ نوشته شده‌است. از آنجا که، رتبه ستونی ماتریس $\mathbf{O}_{\mathrm{nd}}$ کامل و شرط $\mathrm{rank}\left(\left[\mathbf{O}_{\mathrm{nd}} \quad \mathbf{W}_{\mathbf{d}}'\right]\right)-\mathrm{rank}\left(\mathbf{W}_{\mathbf{d}}'\right)=15$ برقرار است؛ پس متغیرهای حالت پرنده و مولفه‌های سرعت باد به‌صورت همزمان قابل بازیابی هستند.

لازم به ذکر است که تحلیل مشاهده‌پذیری متغیرهای حالت، مشاهده‌پذیری قوی، مشاهده‌پذیری مولفه‌های سرعت باد و مشاهده‌پذیری توأمان متغیرهای حالت پرنده و مولفه‌های سرعت باد با در اختیار داشتن انواع حسگرها در جدول پ-۱۵ در پیوست "خ" انجام شده‌است.

۳.۴.۴ تحلیل مشاهده‌پذیری پارامترهای مدل باد

در این بخش، به‌منظور بررسی مشاهده‌پذیری پارامترهای مرتبط با هر مدل باد در نقطه $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{X}$، از شرط مشاهده‌پذیری محلی بیان‌شده در قضیه ۱۱ موجود در بخش ۱.۳.۴ برای معادلات پیوسته کانال طولی پرنده (رابطه (۶۸.۴)) استفاده می‌شود. به این منظور، باید مشتقات لی و شرط مشاهده‌پذیری محلی بر طبق بردار متغیرحالت هر مدل باد، که در جدول ۱.۴ نشان داده شده‌است، ارزیابی شود. از آنجا که، ماتریس مشاهده‌پذیری $\mathbf{O}_{\mathrm{n}}$ کامل است؛ پس، پارامترهای مدل باد مشاهده‌پذیر و از خروجی‌های سیستم قابل بازیابی است.

۵.۴ نتیجه‌گیری

در این فصل، ابتدا تعاریف و قضایای مرتبط با مشاهده‌پذیری متغیرهای حالت، مشاهده‌پذیری قوی، مشاهده‌پذیری ورودی‌های نامعلوم و مشاهده‌پذیری توأمان متغیرهای حالت و ورودی‌های نامعلوم برای

سیستم‌های خطی پیوسته زمان و سیستم‌های خطی گسسته زمان توسعه داده شد. سپس، این مفـاهیم برای سیستم‌های غیرخطی افاین پیوســته زمـان بیـان شـد. در انتهـا، از ایـن مفـاهیم بـه‌منظور تحلیـل مشاهده‌پذیری متغیرهای حالت یک پرنده بدون سرنشین، مولفه‌های سرعت باد و پارامترهای هر مدل باد استفاده شد.

جدول ۱.۴ بردار متغیرهای حالت برای مدل‌های باد مختلف.

فیلتر	نوع مدل باد	بردار متغیر حالت	متغیرهای حالت افزوده
۱	باد ثابت	$\mathbf{f}_{\text{constant}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Ax} + \mathbf{B}_{\text{d}} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{bmatrix} \\ \mathbf{0}_{3\times1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0}_{3\times1} \end{bmatrix} \boldsymbol{\delta}$	$x_{13} = w_{\text{n}}$ $x_{14} = w_{\text{e}}$ $x_{15} = w_{\text{d}}$
۲	باد "1-cosine"	$\mathbf{f}_{\text{1-cosine}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Ax} + \mathbf{B}_{\text{d}} \begin{bmatrix} \frac{x_{11}}{2}\left(1-\cos\left(\frac{2\pi t\sqrt{x_1^2+x_6^2+x_2^2}}{x_{12}}\right)\right) \\ \frac{x_{13}}{2}\left(1-\cos\left(\frac{2\pi t\sqrt{x_1^2+x_6^2+x_2^2}}{x_{14}}\right)\right) \\ \frac{x_{15}}{2}\left(1-\cos\left(\frac{2\pi t\sqrt{x_1^2+x_6^2+x_2^2}}{x_{16}}\right)\right) \end{bmatrix} \\ \mathbf{0}_{6\times1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0}_{6\times1} \end{bmatrix} \boldsymbol{\delta}$	$x_{13} = \text{u}_{\text{m}},\ x_{14} = \text{d}_{\text{x}}$ $x_{15} = \text{v}_{\text{m}},\ x_{16} = \text{d}_{\text{y}}$ $x_{17} = \text{w}_{\text{m}},\ x_{18} = \text{d}_{\text{z}}$
۳	باد برشی	$\mathbf{f}_{\text{wind shear}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Ax} + \mathbf{B}_{\text{d}} \begin{bmatrix} x_{11} \frac{\ln(\frac{x_5}{\text{z}_0})}{\ln(\frac{20}{\text{z}_0})} \cos(x_{12}) \\ x_{11} \frac{\ln(\frac{x_5}{\text{z}_0})}{\ln(\frac{20}{\text{z}_0})} \sin(x_{12}) \\ x_{13} \end{bmatrix} \\ \mathbf{0}_{3\times1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0}_{3\times1} \end{bmatrix} \boldsymbol{\delta}$	$x_{13} = \text{W}_{20}, x_{14} = \psi_{\text{w}}$

فیلتر	نوع مدل باد	بردار متغیر حالت	متغیرهای حالت افزوده
۴	مایکروبرست	$\mathbf{f}_{\mathrm{mb}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Ax}+\mathbf{B}_{\mathrm{d}} \begin{bmatrix} \frac{\lambda(x_1 t - x_{11})}{2}\left[\exp(\mathrm{c}_1 \frac{x_5}{x_{14}}) - \exp(\mathrm{c}_2 \frac{x_5}{x_{14}})\right] \\ \exp\left[\frac{2-(x_1 t - x_{11})^{2\alpha_{\mathrm{mb}}} / {x_{13}}^{2\alpha_{\mathrm{mb}}}}{2\alpha_{\mathrm{mb}}}\right] \\ \frac{\lambda\left(x_6 t + x_{12}\right)}{2}\left[\exp(\mathrm{c}_1 \frac{x_5}{x_{14}}) - \exp(\mathrm{c}_2 \frac{x_5}{x_{14}})\right] \\ \exp\left[\frac{2-\left((x_1 t - x_{11})^2 + (x_6 t + x_{12})^2\right)^{\alpha_{\mathrm{mb}}} / {x_{13}}^{2\alpha_{\mathrm{mb}}}}{2\alpha_{\mathrm{mb}}}\right] \\ -\lambda\left[1-\frac{(x_1 t - x_{11})^{2\alpha_{\mathrm{mb}}}}{2 {x_{13}}^{2\alpha_{\mathrm{mb}}}}\right]\exp\left[\frac{2-(x_1 t - x_{11})^{2\alpha_{\mathrm{mb}}} / {x_{13}}^{2\alpha_{\mathrm{mb}}}}{2\alpha_{\mathrm{mb}}}\right] \\ \left\{\frac{x_{14}}{\mathrm{c}_1}\left[\exp(\mathrm{c}_1 \frac{x_5}{x_{14}})-1\right] - \frac{x_{14}}{\mathrm{c}_2}\left[\exp(\mathrm{c}_2 \frac{x_5}{x_{14}})-1\right]\right\} \end{bmatrix} \\ \mathbf{0}_{3\times1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0}_{3\times1} \end{bmatrix}\boldsymbol{\delta}$	$x_{13} = \mathrm{x}_{\mathrm{c}},\ x_{14} = \mathrm{y}_{\mathrm{c}}$ $x_{15} = \mathrm{h}_{\max}, x_{16} = \mathrm{r}_{\max}$

۵ طراحی فیلترهای چندمدلی

این فصل به بیان جزییات الگوریتم فیلتر چندمدلی طراحی‌شده به‌منظور تخمین نوع مدل باد، پارامترهای آن و همچنین، متغیرهای حالت پرنده بدون سرنشین بال‌ثابت می‌پردازد. به این‌منظور، ابتدا در بخش ۱.۵ فرمولاسیون مساله چندمدلی بیان می‌شود. سپس، در بخش ۲.۵ الگوریتم فیلتر چندمدلی تخمین باد بیان می‌شود. سپس، در بخش ۳.۵ نتایج تخمین چندمدلی پدیده باد با استفاده از فیلتر کالمن چندمدلی توسعه‌یافته به‌منظور تخمین مدل باد، پارامترهای آن و متغیرهای حالت پرنده بیان می‌شود. در نهایت، در بخش ۴.۵ جمع‌بندی این فصل ارائه می‌شود.

۱.۵ فرمولاسیون مساله چندمدلی

هدف از یک فیلتر چندمدلی، تخمین مدل دینامیکی مسئله و متغیرهای حالت سیستم ($\mathbf{x}_k$) با استفاده از خروجی‌های موجود ($\mathbf{z}_k$) و از طریق یک فرآیند بازگشتی است. یک سیستم دینامیکی چندمدلی غیرخطی در فضای حالت گسسته زمان به‌صورت زیر بیان می‌شود [۱۰۶]:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}_{m,k-1}(\mathbf{x}_{k-1}, \boldsymbol{\delta}_{k-1}, \boldsymbol{\omega}_{k-1}) \qquad (1.5)$$

در رابطه فوق، δ و k به‌ترتیب بیانگر ورودی کنترلی و گام زمانی نمونه‌برداری هستند. همچنین، m اشاره به m–امین مدل از مجموعه M مدل موجود دارد. $\mathbf{f}$ نیز یک تابع غیرخطی است. معادله اندازه‌گیری نیز به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}_{m,k}(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k) \qquad (2.5)$$

در رابطه فوق، $\mathbf{h}$ یک تابع غیرخطی است. همچنین، $\boldsymbol{\omega}_k$ و $\mathbf{v}_k$ به‌ترتیب بیانگر نویزهای فرآیند و اندازه‌گیری با ماتریس‌های کواریانس معلوم $\mathbf{Q}$ و $\mathbf{R}$ هستند.

۲.۵ الگوریتم فیلتر چندمدلی پدیده باد

در این فصل، از روش فیلتر کالمن چندمدلی استاتیکی توسعه‌یافته به‌منظور تخمین مدل باد، پارامترهای آن و متغیرهای حالت پرنده بدون سرنشین استفاده می‌شود. در این صورت، مدل صحیح باد در بین مجموعه‌ای از مدل‌های باد وجود دارد. همچنین، هر مدل باد دارای دینامیک مخصوص به خود است؛ لذا، تخمین‌گر دینامیکی است. این الگوریتم، روش فیلتر چندمدلی پدیده باد (MMWE)[1] نامیده می‌شود. در این روش، از چهار فیلتر به‌منظور تخمین مدل باد ثابت، مدل باد "1-cosine"، مدل باد برشی و مدل مایکروبرست استفاده می‌شود که هر کدام با یک مدل باد منطبق شده و به‌صورت جداگانه کار می‌کنند.

هر فیلتر علاوه بر تخمین متغیرهای حالت و ماتریس کواریانس، یک ضریب وزنی نیز بر مبنای اختلاف خروجی تخمین‌زده‌شده با خروجی اندازه‌گیری محاسبه می‌کند. در نهایت، خروجی فیلتر چندمدلی استاتیکی در هر لحظه یک ترکیب گوسی از میانگین وزن‌دار بهترین تخمین متغیرهای حالت، ماتریس کواریانس و نوع مدل باد حاصل از فیلترهای موجود است. شماتیک نحوه عملکرد فیلتر چندمدلی به منظور تخمین نوع مدل باد و متغیرهای حالت پرنده در شکل ۱.۵ نشان داده شده‌است. در ادامه، جزئیات فیلتر چندمدلی پیشنهادی تشریح می‌شود.

۱.۲.۵ مقداردهی اولیه

در الگوریتم فیلتر چندمدلی باد، هر فیلتر دارای تعدادی پارامتر است که باید قبل از اجرای الگوریتم مقداردهی شود. از جمله این پارامترها می‌توان به مقدار اولیه متغیرهای حالت ابتدایی و ماتریس کواریانس مدل m-ام ($\mathbf{x}_0^m$ و $\mathbf{P}_0^m$) و احتمال اولیه هر مدل باد (Pr_0^m) اشاره کرد.

۲.۲.۵ اجرای فیلتر کالمن توسعه‌یافته منطبق با هر مدل

در شروع k-امین گام زمانی، چهار فیلتر کالمن توسعه‌یافته به‌صورت مستقل برای هر یک از مدل‌های باد (مدل باد ثابت، مدل باد "1-cosine"، مدل باد برشی و مدل مایکروبرست) اجرا می‌شوند. سپس، در گام نمونه‌برداری k-ام، هر یک از فیلترهای منطبق بر مدل به تخمین متغیرهای حالت مرتبط با m-امین

[1] Multiple Model Wind Estimator

مدل ($\hat{\mathbf{x}}_k^m$)، ماتریس کواریانس مرتبط با هر مدل ($\mathbf{P}_k^m$) و تابع احتمال[1] هر مدل (τ_k^m) برای m=1,…,4 می‌پردازد. تابع احتمال مرتبط با هر مدل به‌صورت زیر محاسبه می‌شود [۱۰۷]:

$$\tau_k^m \approx \frac{\exp(-\frac{\mathbf{r}_k^{m^{\mathrm{T}}} \mathbf{S}_k^{m^{-1}} \mathbf{r}_k^m}{2})}{(2\pi)^{\frac{\mathrm{n_m}}{2}} \left|\mathbf{S}_k^m\right|^{\frac{1}{2}}} \tag{۳.۵}$$

در رابطه فوق، $\mathrm{n_m}$ بیانگر تعداد سنسورهای خروجی است. از آنجا که تعداد اندازه‌گیری‌ها برای همه فیلترها یکسان است؛ پس $\mathrm{n_m}$ نیز برای همه مدل‌ها یکسان است. همچنین، $\mathbf{r}_k^m$ بیانگر باقیمانده[2] فیلتر m-ام است که بر مبنای اختلاف خروجی اندازه‌گیری‌شده ($\mathbf{z}_k$) با خروجی تخمین‌زده شده ($\hat{\mathbf{z}}_k^m$) است و به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{r}_k^m = \mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_k^m \tag{۴.۵}$$

همچنین، $\mathbf{S}_k^m$ ماتریس کواریانس باقیمانده است که از رابطه $\mathbf{S}_k^m = \mathbf{H}_k^{m^{\mathrm{T}}} \mathbf{P}_k^m \mathbf{H}_k^m$ حاصل می‌شود. اینجا، $\mathbf{H}_k^m$ نیز بیانگر ماتریس خروجی m-امین مدل در گام زمانی k-ام است.

۳.۲.۵ به‌روز رسانی احتمال هر فیلتر

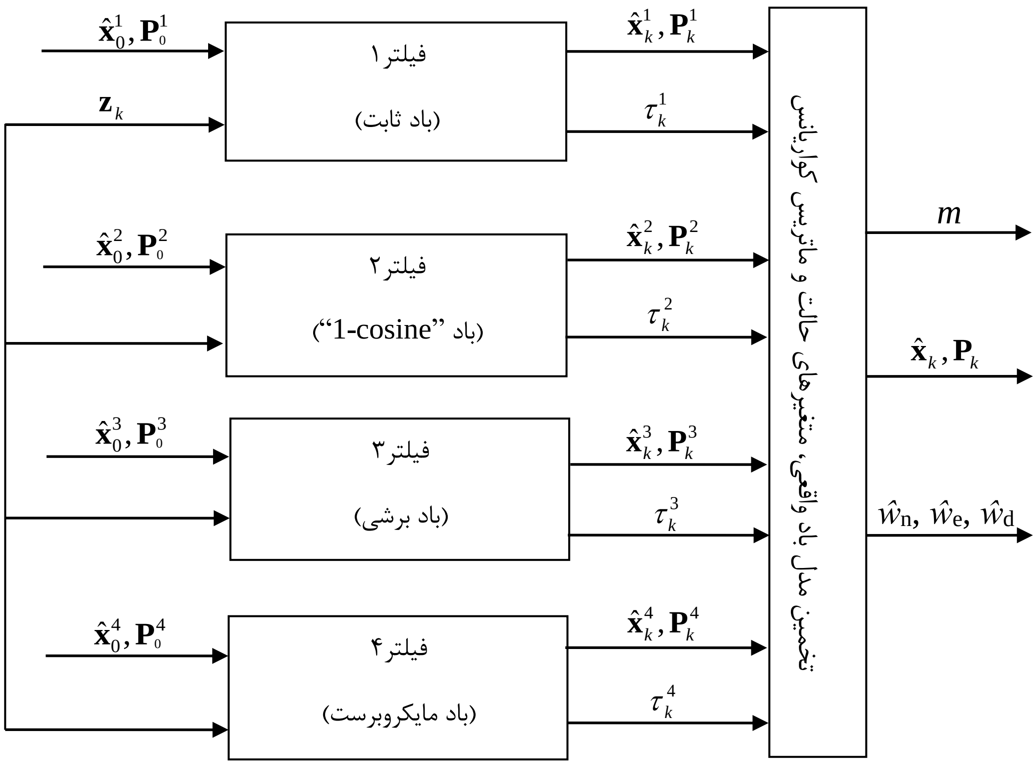
احتمال انطباق مدل باد m-ام در لحظه k به‌صورت زیر به‌روز رسانی می‌شود:

$$\mathrm{Pr}_k^m = \frac{\tau_k^m \ \mathrm{Pr}_{k-1}^m}{\sum_{m=1}^{4} \tau_k^m \ \mathrm{Pr}_{k-1}^m} \tag{۵.۵}$$

لازم به ذکر است که مقدار اولیه احتمال هر مدل قبل از اجرای الگوریتم فیلتر چندمدلی به‌صورت تصادفی مقداردهی و نرمالیزه می‌شود.

[1] Likelihood Function

[2] Residual



شکل ۱.۵ فیلتر چندمدلی پدیده باد به‌منظور تخمین مدل باد و متغیرهای حالت.

۴.۲.۵ تخمین متغیرهای حالت و کواریانس

بهترین تخمین متغیرهای حالت و ماتریس کواریانس متناظر با آن بر مبنای میانگین وزنی تخمین‌های متغیرهای حالت و ماتریس کواریانس به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \sum_{m=1}^{4} \hat{\mathbf{x}}_k^m \ \mathrm{Pr}_k^m \tag{۶.۵}$$

$$\mathbf{P}_k = \sum_{m=1}^{4} \mathrm{Pr}_k^m \left(\mathbf{P}_k^m + \left[\hat{\mathbf{x}}_k^m - \hat{\mathbf{x}}_k \right] \left[\hat{\mathbf{x}}_k^m - \hat{\mathbf{x}}_k \right]^{\mathrm{T}} \right) \tag{۷.۵}$$

۵.۲.۵ تخمین مولفه‌های باد

بهترین تخمین از مولفه‌های باد بر مبنای میانگین وزنی مدل‌های باد به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\hat{w}_{\mathrm{n}} = \sum_{m=1}^{4} \mathrm{Pr}_k^m \ \hat{w}_{\mathrm{n}}^m \tag{۸.۵}$$

$$\hat{w}_{\mathrm{e}}=\sum_{m=1}^{4} \mathrm{Pr}_k^m \, \hat{w}_{\mathrm{e}}^m \qquad (۹.۵)$$

$$\hat{w}_{\mathrm{d}}=\sum_{m=1}^{4} \mathrm{Pr}_k^m \, \hat{w}_{\mathrm{d}}^m \qquad (۱۰.۵)$$

۶.۲.۵ مدل‌سازی مساله تخمین باد

در این بخش، مدل دینامیکی تصادفی غیرخطی پرنده بدون سرنشین بال‌ثابت در فضای حالت بـه‌منظور تعریف مساله تخمین بر مبنای روش فیلتر چندمدلی بیان می‌شود. هر فیلتر منطبق بر مدل بـاد در هـر گام نمونه‌برداری به‌صورت مستقل اجرا شده و به مدل تصادفی پرنده همراه با مدل باد نیاز دارد. جزییات مدل تصادفی پرنده همراه با هر مدل باد در جدول ۱.۵ ارائه شده‌است.

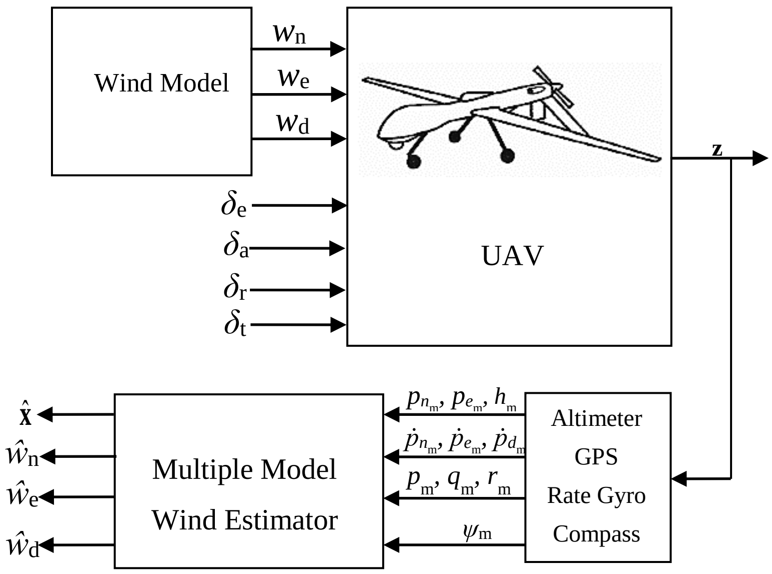
۳.۵ نتایج تخمین چندمدلی پدیده باد

در این بخش، فیلتر چندمدلی MMWE به‌منظور تخمین توأمان متغیرهای حالت پرنده و نیز مدل باد استفاده می‌شود. بلوک دیاگرام الگوریتم تخمین مدل باد برای یک پرنده بدون سرنشین بال‌ثابت در شکل ۲.۵ نشان داده شده‌است. فرض می‌شود که اندازه‌گیری‌های پرنده توسط سه حسگر ژیروسکوپ نرخی، یک ارتفاع‌سنج، یک قطب‌نمای دیجیتال و یک گیرنده GPS فراهم می‌شود. همچنین، خروجی‌های سنسور به‌صورت آغشته به نویز مدل می‌شود. فیلتر چندمدلی MMWE با استفاده از خروجی‌های نویزی سنسورها، نوع مدل باد، پارامترهای مدل باد و نیز متغیرهای حالت پرنده را تخمین می‌زند.

در ادامه، نتایج شبیه‌سازی عددی به‌منظور بررسی عملکرد فیلتر چندمدلی MMWE در حضور باد ثابت، باد "1-cosine"، باد برشی و مایکروبرست به‌ترتیب در بخش‌های ۱.۳.۵، ۲.۳.۵، ۳.۳.۵ و ۴.۳.۵ بیان می‌شود. فرض می‌شود که پرنده در شرایط تریم، در ارتفاع ۱۰۰ متری و سرعت ۳۵ متر بر ثانیه در حال پرواز است. در نهایت، در بخش ۱۰.۳.۵، عملکرد فیلتر چندمدلی MMWE با یک فیلتر EKF مقایسه می‌شود. همچنین، از آنجا که مدل‌های باد ممکن است همراه با خطا باشند و نیز درک صحیح از مقادیر اغتشاش فرآیند برای هر مدل مشکل است؛ لذا، فیلترهای مقاوم به‌منظور تخمین مدل باد همراه با عدم قطعیت استفاده می‌شود که در پیوست "د" ارائه شده‌است.

جدول ۱.۵ مدل دینامیکی متغیرهای حالت افزوده تحت انواع مدل‌های باد.

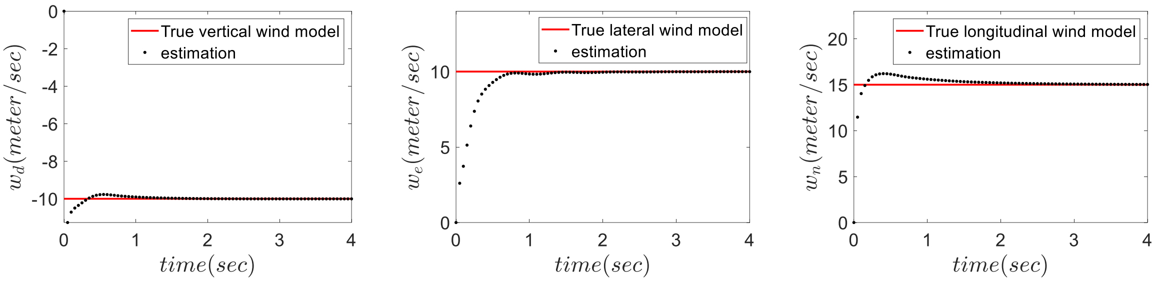
مدل	نوع باد	متغیرهای حالت افزوده	بیان فضای حالت مدل‌های باد	دینامیک افزوده
۱	باد ثابت	$x_{13}=w_{\mathrm{n}}$ $x_{14}=w_{\mathrm{e}}$ $x_{15}=w_{\mathrm{d}}$	$w_{\mathrm{n}}=\text{constant}$ $w_{\mathrm{e}}=\text{constant}$ $w_{\mathrm{d}}=\text{constant}$	$\dot{x}_i=\omega_i$ $i=13,\ldots,15$
۲	باد "1-cosine"	$x_{13}=\mathrm{u_m},\ x_{14}=\mathrm{d_x}$ $x_{15}=\mathrm{v_m},\ x_{16}=\mathrm{d_y}$ $x_{17}=\mathrm{w_m},\ x_{18}=\mathrm{d_z}$	$u_{\mathrm{w_{1\text{-}cosine}}}=\frac{\mathrm{u_m}}{2}\left(1-\cos\left(\frac{\pi k\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}{\mathrm{d_x}}\right)\right)$ $v_{\mathrm{w_{1\text{-}cosine}}}=\frac{\mathrm{v_m}}{2}\left(1-\cos\left(\frac{\pi k\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}{\mathrm{d_y}}\right)\right)$ $w_{\mathrm{w_{1\text{-}cosine}}}=\frac{\mathrm{w_m}}{2}\left(1-\cos\left(\frac{\pi k\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}{\mathrm{d_z}}\right)\right)$	$\dot{x}_i=\omega_i$ $i=13,\ldots,18$
۳	باد برشی	$x_{13}=\mathrm{w}_{20},x_{14}=\psi_{\mathrm{w}}$	$w_{n_{\text{wind shear}}}=\mathrm{x}_{13}\frac{\ln(\frac{-x_3}{z_0})}{\ln(\frac{20}{z_0})}\cos(x_{14})$ $w_{e_{\text{wind shear}}}=\mathrm{x}_{13}\frac{\ln(\frac{-x_3}{z_0})}{\ln(\frac{20}{z_0})}\sin(x_{14})$	$\dot{x}_i=\omega_i$ $i=13\,\&\,14$
۴	مایکروبرست	$x_{13}=\mathrm{x_c},\ x_{14}=\mathrm{y_c}$ $x_{15}=\mathrm{h_{max}},x_{16}=\mathrm{r_{max}}$	$w_{n_{\mathrm{mb}}}=\frac{\lambda\left(x_1-x_{13}\right)}{2}\left[\exp(\mathrm{c}_1\frac{-x_3}{x_{15}})-\exp(\mathrm{c}_2\frac{-x_3}{x_{15}})\right]$ $\exp\left[\frac{2-\left((x_1-x_{13})^2+(x_2+x_{14})^2\right)^{\alpha_{\mathrm{mb}}}/x_{16}{}^{2\alpha_{\mathrm{mb}}}}{2\alpha_{\mathrm{mb}}}\right]$ $w_{e_{\mathrm{mb}}}=\frac{\lambda\left(x_2+x_{14}\right)}{2}\left[\exp(\mathrm{c}_1\frac{-x_3}{x_{15}})-\exp(\mathrm{c}_2\frac{-x_3}{x_{15}})\right]$ $\exp\left[\frac{2-\left((x_1-x_{13})^2+(x_2+x_{14})^2\right)^{\alpha_{\mathrm{mb}}}/x_{16}{}^{2\alpha_{\mathrm{mb}}}}{2\alpha_{\mathrm{mb}}}\right]$ $w_{d_{\mathrm{mb}}}=\lambda\left[1-\frac{\left((x_1-x_{13})^2+(x_2+x_{14})^2\right)^{\alpha_{\mathrm{mb}}}}{2\,x_{16}{}^{2\alpha_{\mathrm{mb}}}}\right]$ $\left\{\frac{x_{15}}{\mathrm{c}_1}\left[\exp(\mathrm{c}_1\frac{-x_3}{x_{15}})-1\right]-\frac{x_{15}}{\mathrm{c}_2}\left[\exp(\mathrm{c}_2\frac{-x_3}{x_{15}})-1\right]\right\}$ $\exp\left[\frac{2-\left((x_1-x_{13})^2+(x_2+x_{14})^2\right)^{\alpha_{\mathrm{mb}}}/x_{16}{}^{2\alpha_{\mathrm{mb}}}}{2\alpha_{\mathrm{mb}}}\right]$	$\dot{x}_i=\omega_i$ $i=13,\ldots,16$



شکل ۲.۵ بلوک دیاگرام الگوریتم تخمین مدل باد.

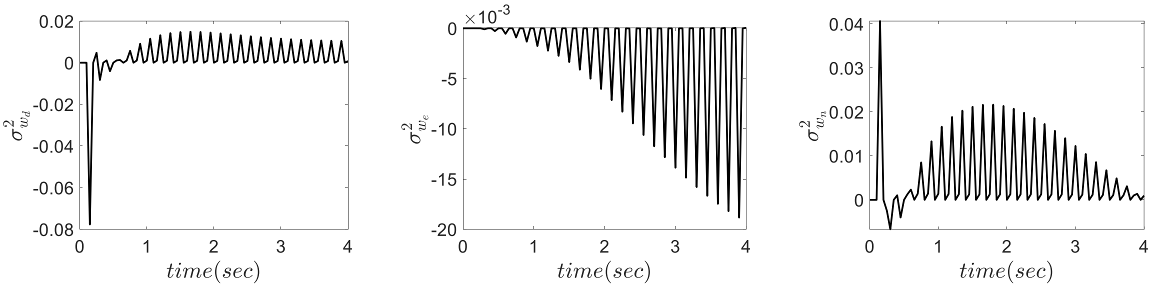
۱.۳.۵ تخمین مدل باد ثابت

در این بخش، تنها مدل باد ثابت به پرنده اعمال می‌شود؛ درحالیکه فیلتر MMWE از نوع مدل باد ناآگاه است. عملکرد فیلتر MMWE به‌منظور تخمین w_n، w_e و w_d در شکل ۳.۵ نشان داده شده‌است. مقادیر تخمین‌زده‌شده w_n، w_e و w_d از مقدار اولیه صفر شروع شده و در کسری از ثانیه به مقادیر واقعی یعنی ۳۰، ۲۰ و ۴۰- همگرا می‌شوند. عملکرد فیلتر MMWE در تخمین متغیرهای حالت پرنده در شکل ۵.۵ نشان داده شده‌است. خطوط پر بیانگر متغیر حالت واقعی و خطوط تیره بیانگر متغیر حالت تخمین‌زده شده‌است. همچنین، تاریخچه زمانی المان‌های ماتریس کواریانس سرعت باد به‌منظور تخمین مولفه‌های سرعت باد ثابت در شکل ۴.۵ نشان داده شده‌است. نتایج حاکی از تخمین صحیح مدل باد ثابت و متغیرهای حالت پرنده توسط الگوریتم MMWE است. بر اساس بخش ۳.۱.۳، از آنجاکه اندازه‌گیری نویزی از تمام متغیرها بجز زوایای رول و پیچ موجود است، لذا، تخمین متغیرهای حالت دارای دقت و سرعت همگرایی بیشتری نسبت به تخمین مولفه‌های باد است.



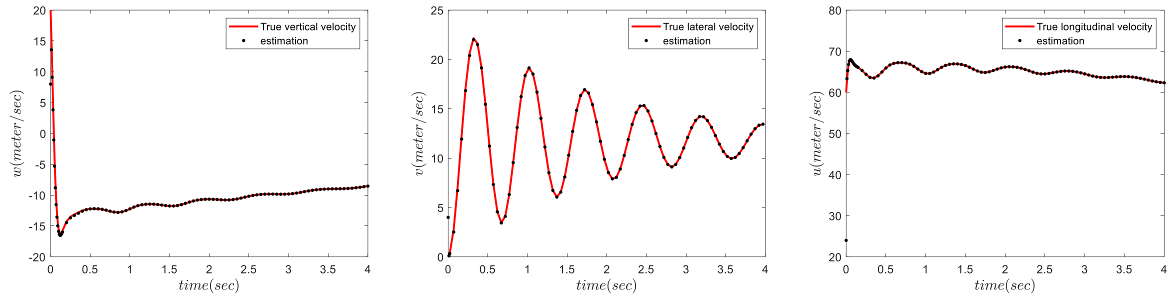
(ج) (ب) (الف)

شکل ۳.۵ تخمین باد ثابت: الف) w_n ب) w_e ج) w_d.

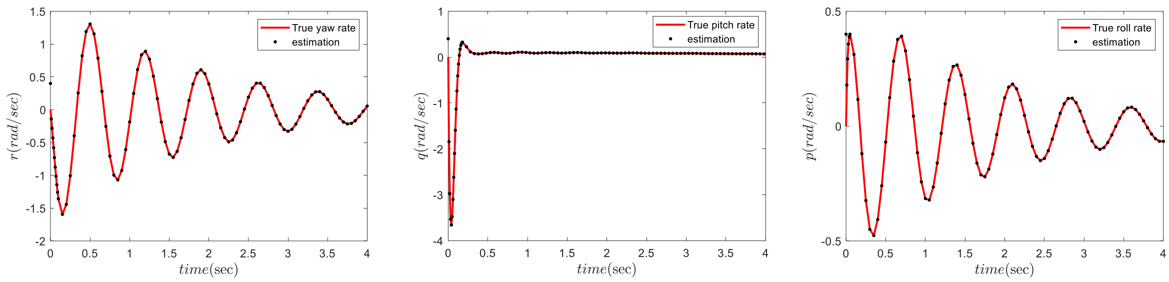


(الف) (ب) (ج)

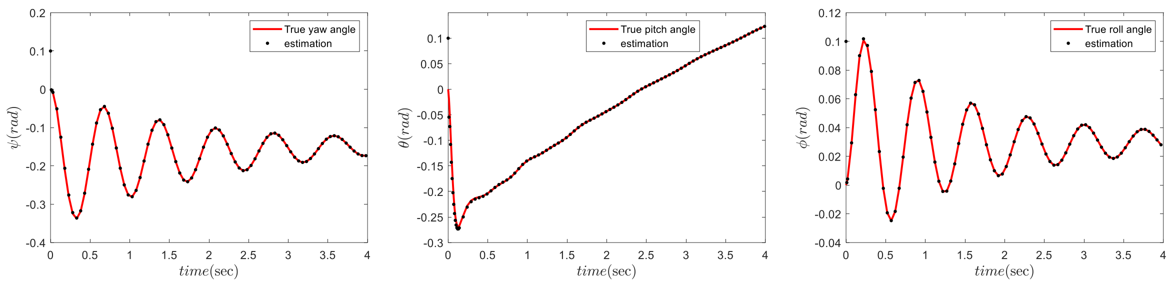
شکل ۴.۵ تاریخچه زمانی واریانس مولفه‌های سرعت باد: الف) w_n ب) w_e ج) w_d.



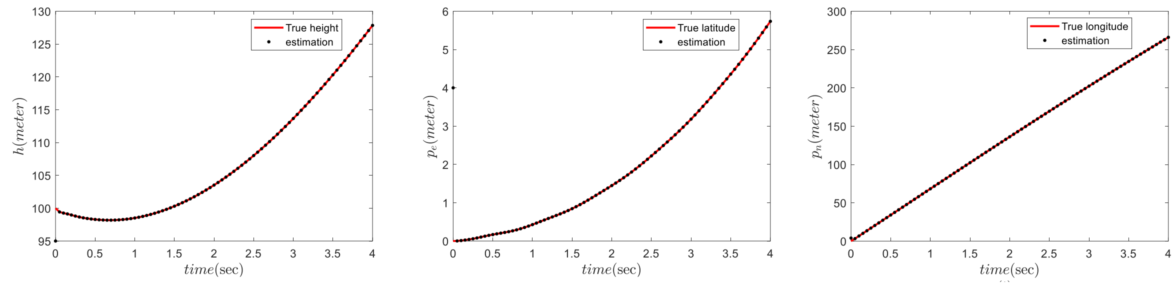
(الف) (ب) (پ)



(ت) (ث) (ج)



(چ) (ح) (خ)

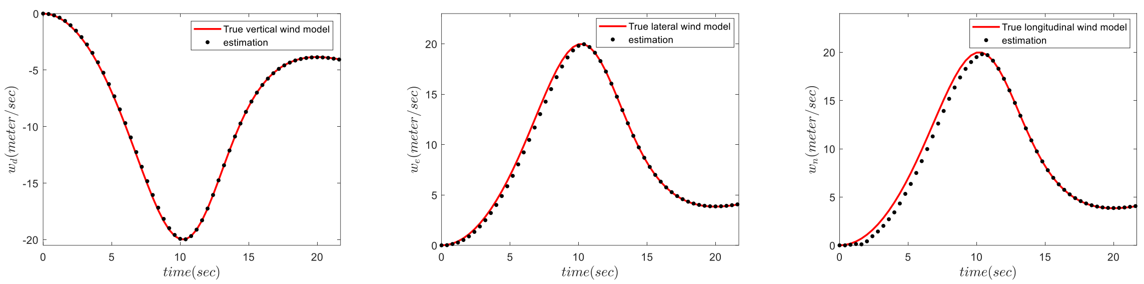


(د) (ذ) (ر)

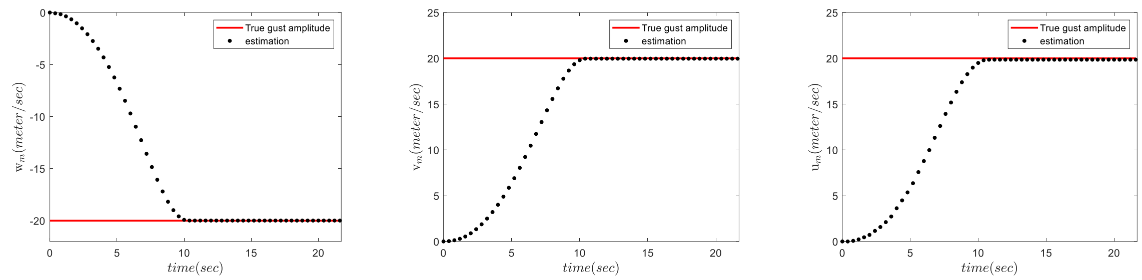
شکل ۵.۵ تخمین متغیرهای حالت در حضور باد ثابت: الف) سرعت طولی ب) سرعت عرضی پ) سرعت عمودی ت) نرخ رول ث) نرخ پیچ ج) نرخ یاو چ) زاویه رول ح) زاویه پیچ خ) زاویه یاو د)-ر) موقعیت طولی، عرضی و ارتفاع.

۲.۳.۵ تخمین مدل باد ”1-cosine“

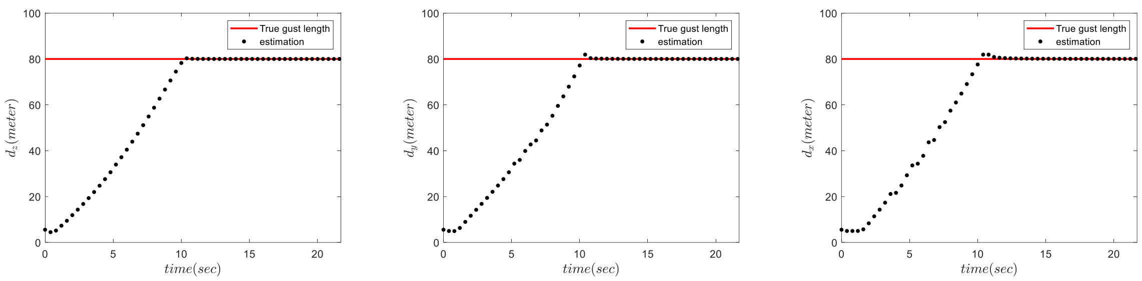
در این بخش، مدل باد ”1-cosine“ به پرنده اعمال شده و فیلتر MMWE از نوع مدل باد ناآگاه است. نتایج در شکل ۶.۵ تا شکل ۷.۵ نشان داده شده‌است. عملکرد فیلتر MMWE به‌منظور تخمین w_n، w_e و w_d در شکل ۶.۵ (الف)-(پ) نشان داده شده‌است. همچنین، همگرایی دامنه‌های باد و طول موج‌های تخمین‌زده‌شده به مقادیر واقعی به‌ترتیب در شکل ۶.۵ (ت)-(ج) و شکل ۶.۵ (چ)-(خ) نشان داده شده‌است.



(الف) (ب) (پ)



(ج) (ث) (ت)



(خ) (ح) (چ)

شکل ۶.۵ تخمین باد ”1-cosine“: (الف)-(پ) مولفه‌های باد (ت)-(ج) دامنه‌های باد (چ)-(خ) طول موج‌های باد.

مقادیر تخمین‌زده‌شده اندازه باد ”1-cosine“ از مقدار اولیه صفر شروع می‌شود. همچنین، مقادیر آغازین طول موج تخمین‌زده‌شده به‌منظور جلوگیری از تکینگی d_m در معادله (۴۸.۳) مقداری کوچک (غیر صفر) انتخاب می‌شود. ازآنجا که، مقادیر تخمین ابتدایی مولفه‌های باد با مقادیر واقعی منطبق هستند؛ لذا مولفه‌های باد سریعتر از پارامترهای باد همگرا می‌شوند. همچنین، تخمین متغیرهای پرنده در شکل ۷.۵ نشان داده شده‌است. در نهایت، تخمین سرعت باد در نقطه آغازین متفاوت در شکل ۸.۵ نشان داده شده‌است. نتایج حاکی از عملکرد دقیق فیلتر چندمدلی MMWE است؛ هنگامی‌که پدیده باد ”1-cosine“ به پرنده اعمال می‌شود.

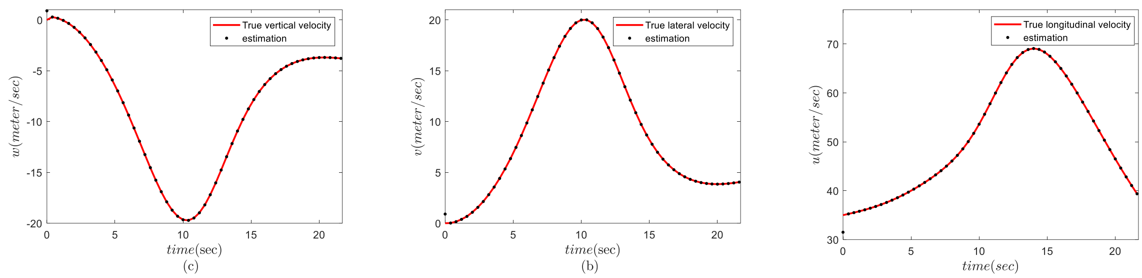
۳.۳.۵ تخمین باد برشی

در این بخش، باد برشی به پرنده اعمال می‌شود. عملکرد مناسب فیلتر در تخمین مولفه‌های سرعت باد برشی در شکل ۹.۵ (الف)-(پ) نشان داده شده‌است. به‌علاوه، سرعت باد واقعی و تخمین‌زده شده در

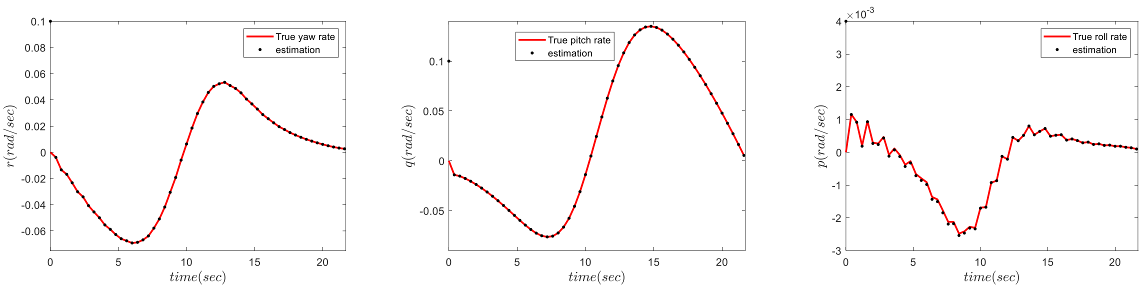
ارتفاع ۲۰ فوت در شکل ۹.۵ (ت) و جهت باد واقعی و تخمین‌زده شده در شکل ۹.۵ (ث) نشان داده شده‌است. پارامترهای تخمین‌زده‌شده از مقادیر اولیه صفر به مقادیر واقعی همگرا می‌شوند. بر اساس معادله (۵۱.۳)، از آنجاکه تخمین ابتدایی مولفه‌های باد وابسته به مقدار ابتدایی W_{20} است، لذا، نقطه آغازین مولفه‌های باد صفر است. همچنین، تخمین متغیرهای حالت پرنده در شکل ۱۰.۵ نشان داده شده‌است. نتایج حاکی از تخمین صحیح مدل باد برشی و متغیرهای حالت پرنده توسط الگوریتم MMWE است.

۴.۳.۵ تخمین مایکروبرست

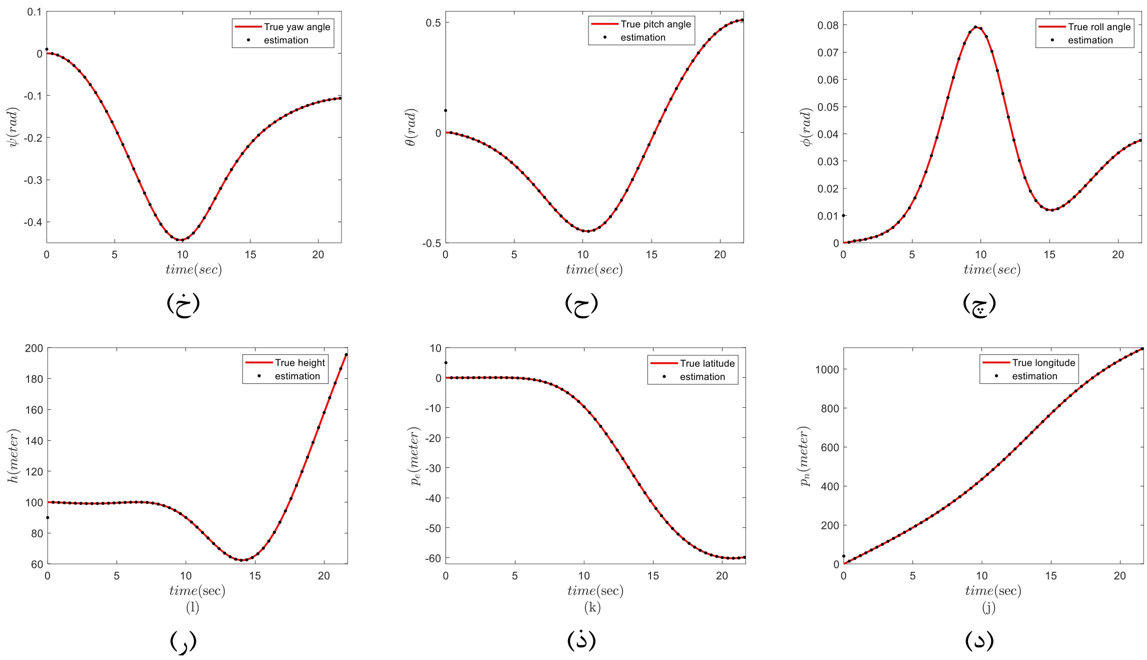
در این بخش، مدل مایکروبرست به پرنده اعمال می‌شود. عملکرد فیلتر MMWE در حضور مایکروبرست در تخمین مولفه‌های سرعت باد در شکل ۱۱.۵ (الف)-(پ) نشان داده شده‌است. شکل ۱۱.۵ (ت)-(ث) مقادیر تخمین‌زده‌شده و واقعی مرکز برست را مقایسه می‌کند. مقادیر ابتدایی این متغیرها صفر انتخاب شده‌است. همچنین، تخمین ارتفاع، فاصله شعاعی و اندازه باد افقی بیشینه به ترتیب در شکل ۱۱.۵ (ج)-(ح) نشان داده شده‌است. عملکرد مناسب فیلتر MMWE در تخمین متغیرهای حالت پرنده در شکل ۱۲.۵ نشان داده شده‌است. نتایج حاکی از عملکرد صحیح الگوریتم MMWE است؛ در حالیکه مایکروبرست به پرنده اعمال می‌شود.



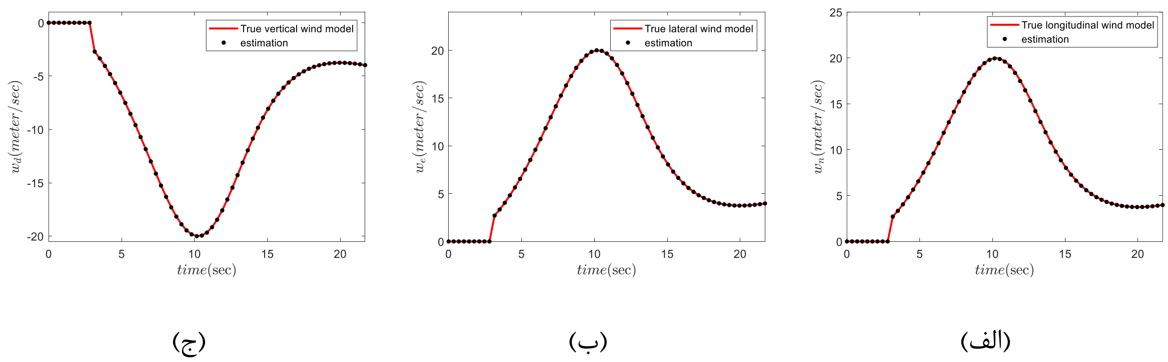
(پ) (ب) (الف)



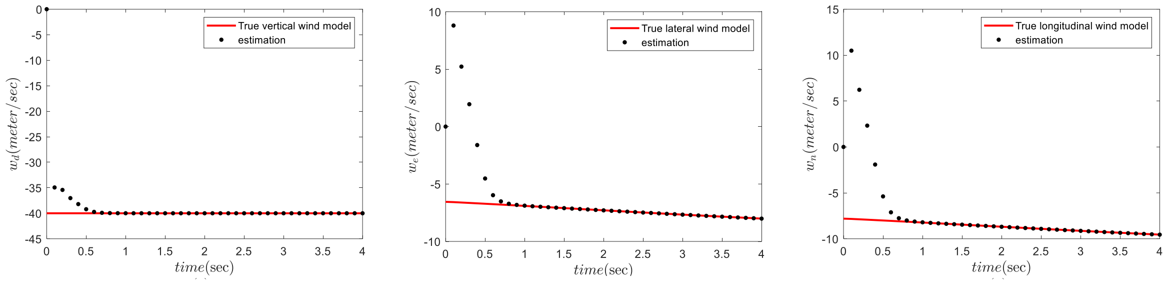
(ج) (ث) (ت)



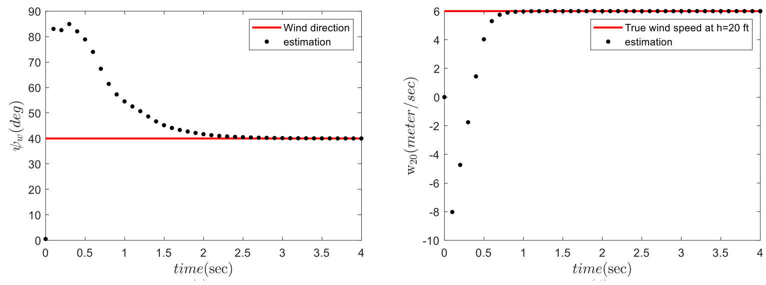
شکل ۷.۵ تخمین متغیرهای حالت در حضور باد ”1-cosine“: الف) سرعت طولی ب) سرعت عرضی پ) سرعت عمودی ت) نرخ رول ث) نرخ پیچ ج) نرخ یاو چ) زاویه رول ح) زاویه پیچ خ) زاویه یاو د)- ر) موقعیت طولی، عرضی و ارتفاع.



شکل ۸.۵ تخمین باد ”1-cosine“ اعمال‌شده در نقطه آغازین متفاوت با پرنده.

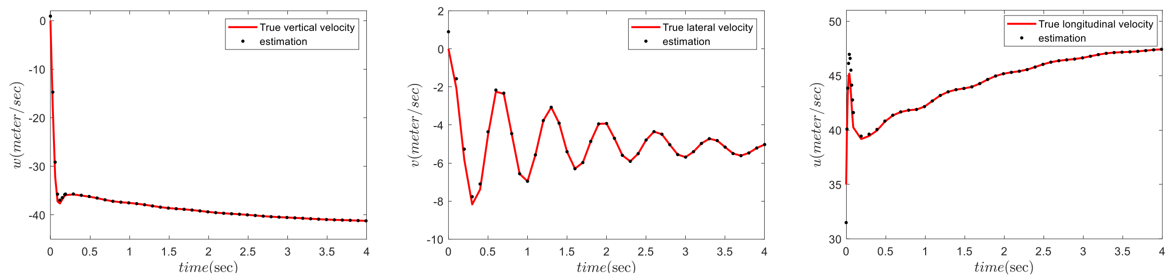


(الف) (ب) (پ)

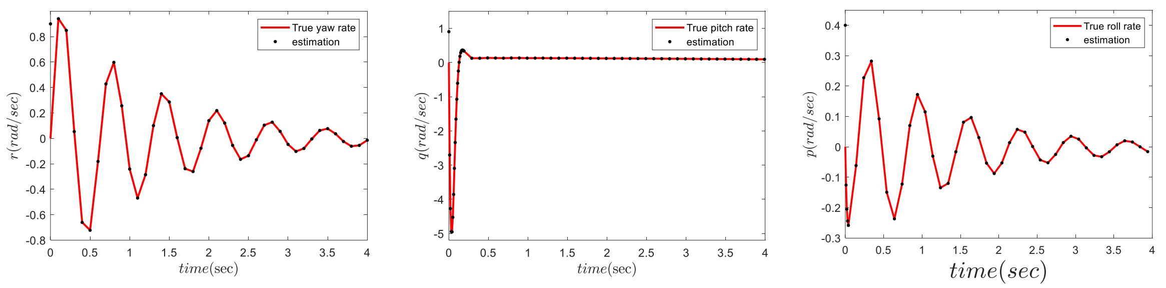


(ت) (ث)

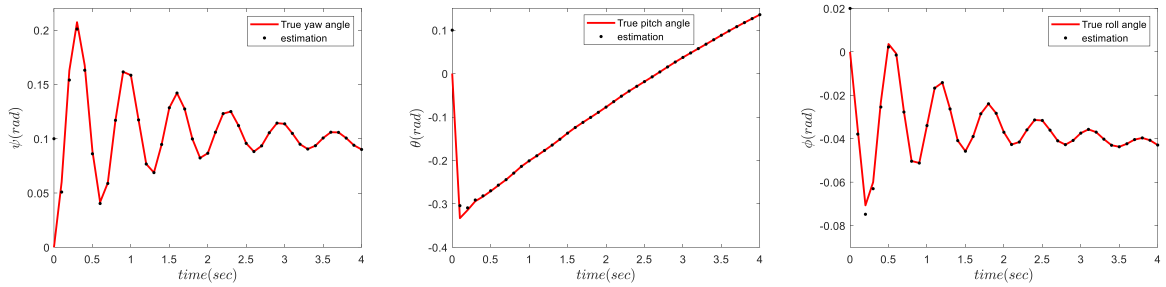
شکل ۹.۵ تخمین باد برشی: الف) w_n ب) w_e پ) w_d ت) سرعت باد در ارتفاع ۲۰ فوت ث) جهت باد.



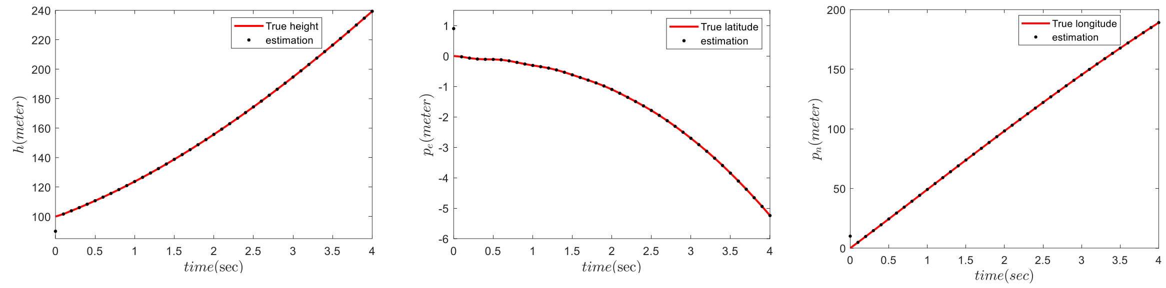
(الف) (ب) (پ)



(ت) (ث) (ج)

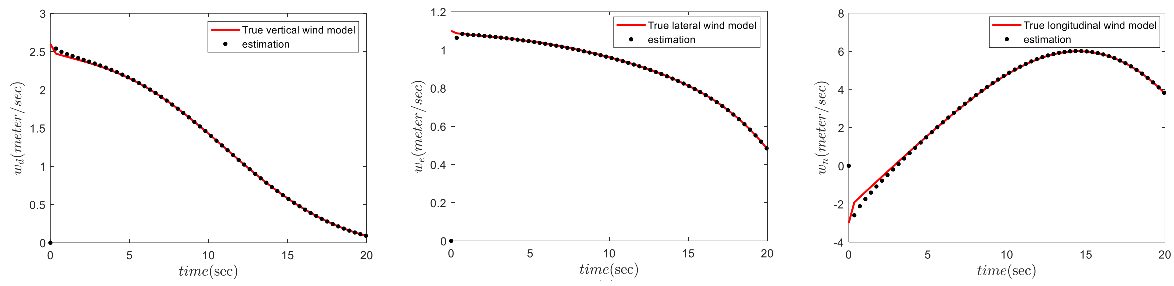


(خ) (ح) (چ)

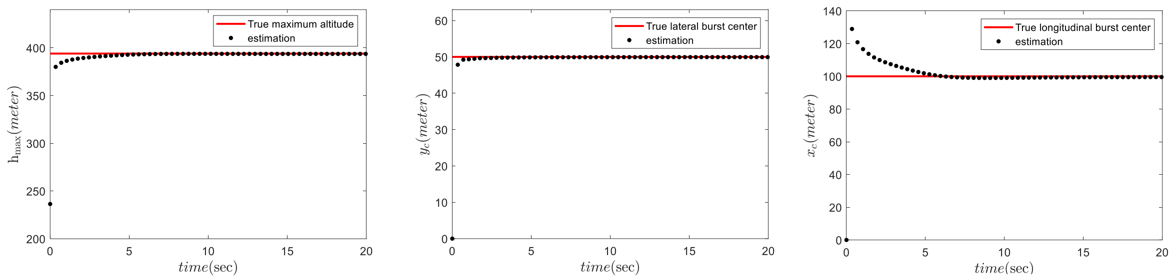


(ر) (ذ) (د)

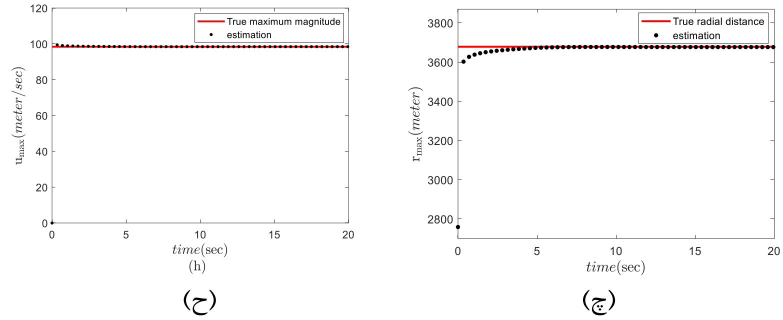
شکل ۱۰.۵ تخمین متغیرهای حالت در حضور باد برشی: الف) سرعت طولی ب) سرعت عرضی پ) سرعت عمودی ت) نرخ رول ث) نرخ پیچ ج) نرخ یاو چ) زاویه رول ح) زاویه پیچ خ) زاویه یاو د)-ر) موقعیت طولی، عرضی و ارتفاع.



(پ) (ب) (الف)



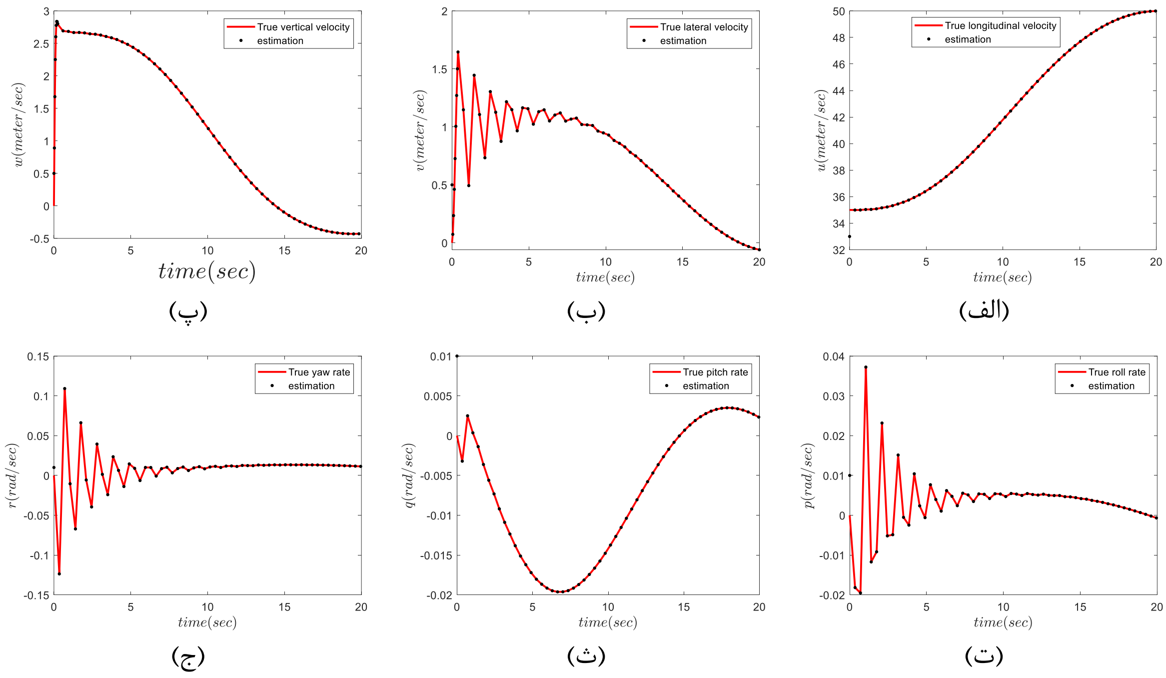
(ج) (ث) (ت)

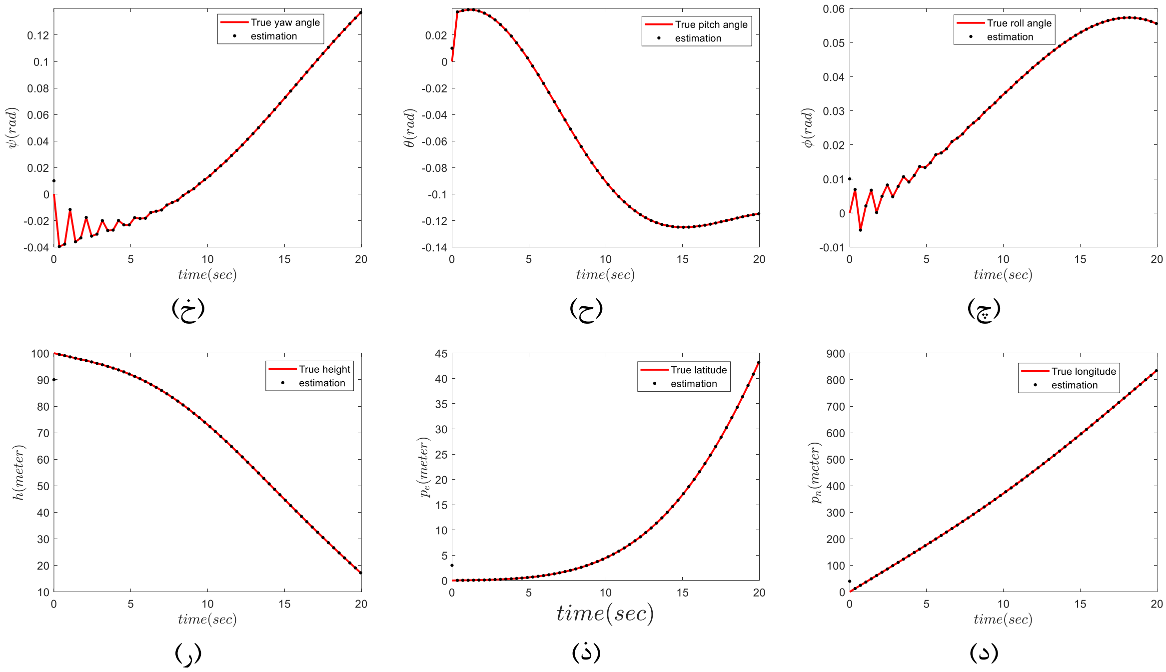


شکل ۱۱.۵ تخمین مایکروبرست: (الف) w_n (ب) w_e (پ) w_d (ت)-(ث) مرکز طولی و عرضی برست (ج)-(ح) ارتفاع، فاصله شعاعی و اندازه متناظر با حداکثر سرعت افقی بیشینه.

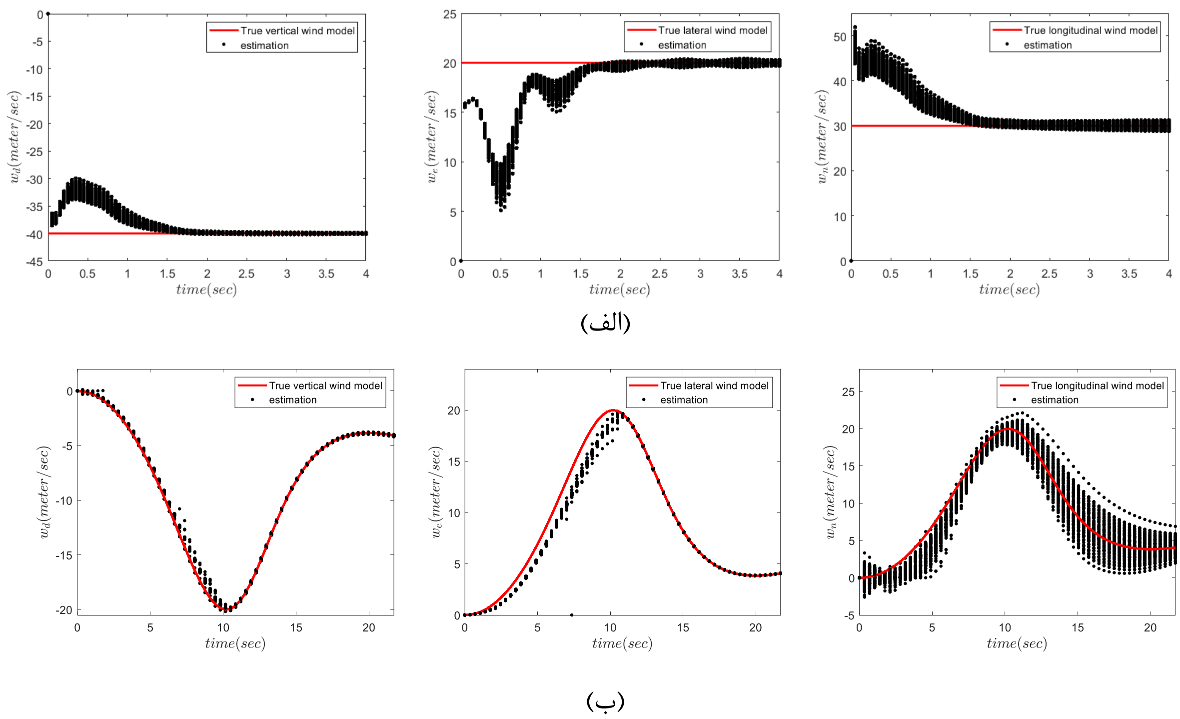
۵.۳.۵ تخمین مدل باد در حضور عدم قطعیت آیرودینامیکی

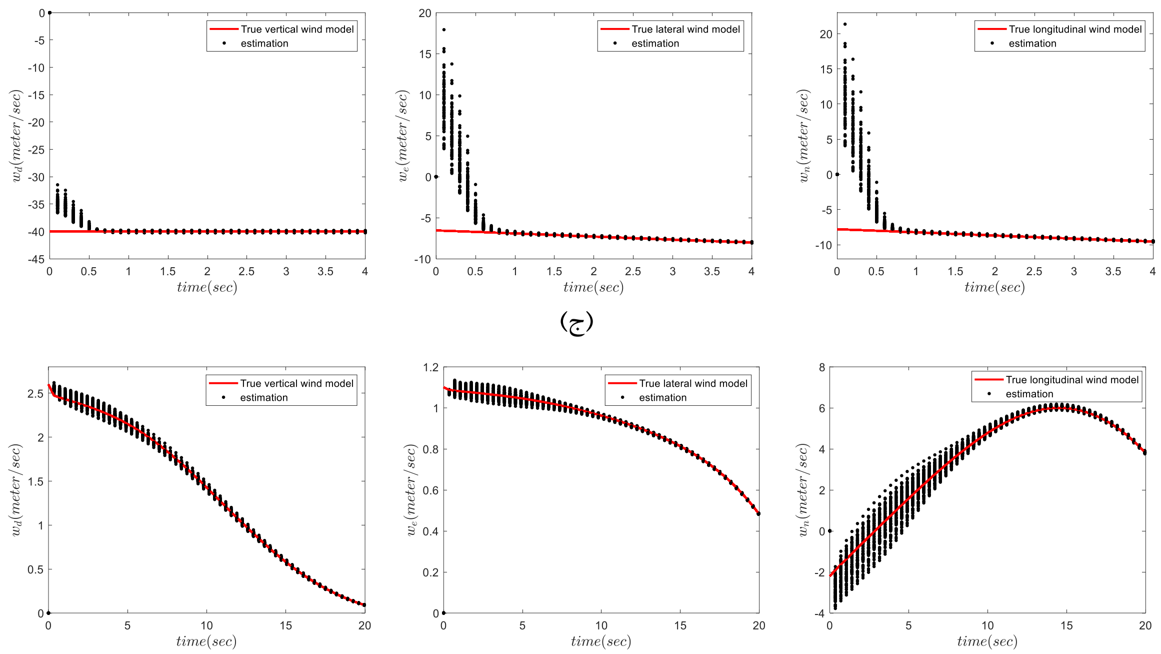
در این بخش، به‌منظور بررسی مقاومت فیلتر چندمدلی پیشنهادی MMWE به تغییرات ضرایب آیرودینامیکی، ۱۰۰ مرتبه مدل غیرخطی پرنده (معادلات (۱.۳) تا (۴.۳)) به‌ازای مقادیر مختلف تمام ضرایب آیرودینامیکی در محدوده عدم قطعیت $\pm 10\%$ حول مقدار نامی شبیه‌سازی می‌شود. نتایج، که در شکل ۱۳.۵ نشان داده شده است، حاکی از عملکرد مناسب فیلتر چندمدلی MMWE در حضور عدم قطعیت آیرودینامیکی است.





شکل ۱۲.۵ تخمین متغیرهای حالت در حضور مایکروبرست: الف) سرعت طولی ب) سرعت عرضی پ) سرعت عمودی ت) نرخ رول ث) نرخ پیچ ج) نرخ یاو چ) زاویه رول ح) زاویه پیچ خ) زاویه یاو د)- ر) موقعیت طولی، عرضی و ارتفاع.





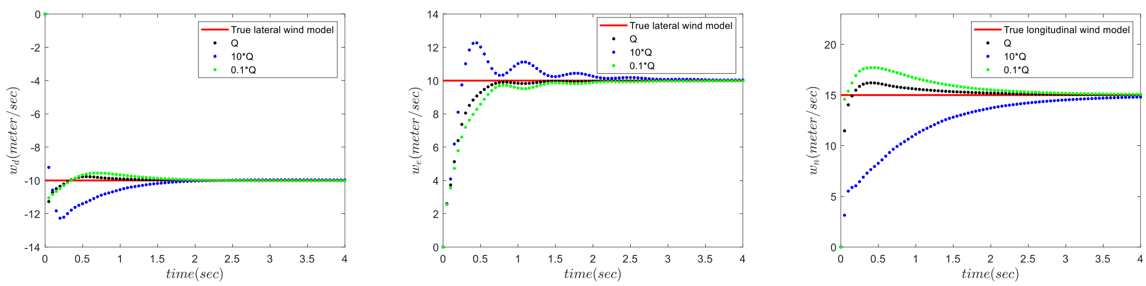
(ج)

(د)

شکل ۱۳.۵ تخمین باد در حضور عدم قطعیت آیرودینامیکی الف) باد ثابت ب) باد "1-cosine" ج) باد برشی د) مایکروبرست.

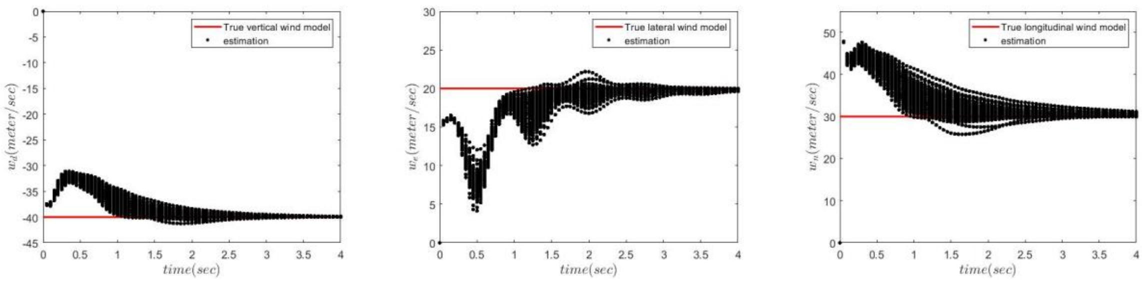
۶.۳.۵ حساسیت‌سنجی نسبت به کواریانس نویز فرآیند به‌منظور تخمین مدل باد

در این بخش، حساسیت فیلتر چندمدلی MMWE نسبت به کواریانس نویز فرآیند بررسی می‌شود. به‌عنوان نمونه، حساسیت فیلتر چندمدلی در تخمین مولفه‌های سرعت باد ثابت نسبت به مقادیر مختلف کواریانس نویز فرآیند در شکل ۱۴.۵ نشان داده شده است. همچنین، ۱۰۰ مرتبه فیلتر چندمدلی به‌ازای مقادیر مختلف کواریانس نویز فرآیند پارامترهای مدل باد در محدوده عدم قطعیت $\pm5\%$ حول مقدار نامی در شکل ۱۵.۵ شبیه‌سازی می‌شود. نتایج حاکی از عملکرد مناسب فیلتر چندمدلی MMWE نسبت به مقادیر مختلف کواریانس نویز فرآیند است.

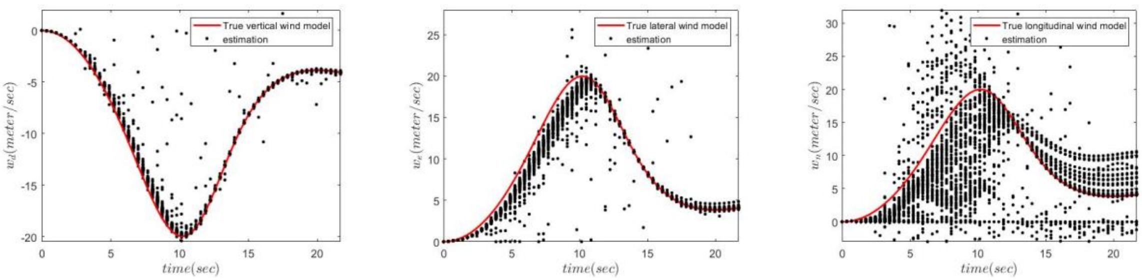


(ج) (ب) (الف)

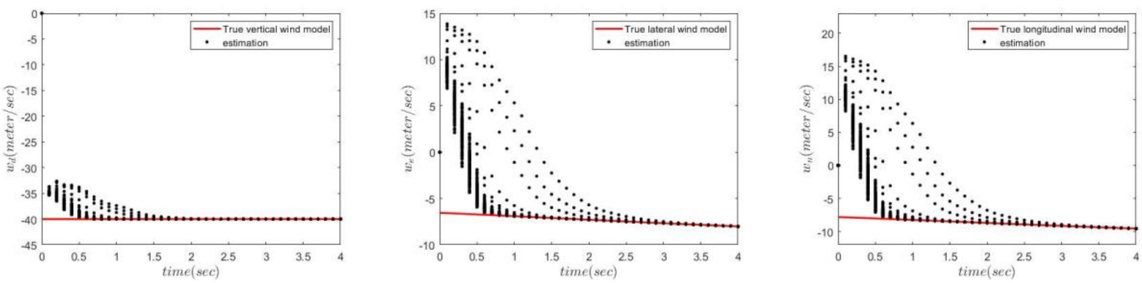
شکل ۱۴.۵ حساسیت فیلتر چندمدلی در تخمین باد ثابت: الف) w_n ب) w_e ج) w_d.



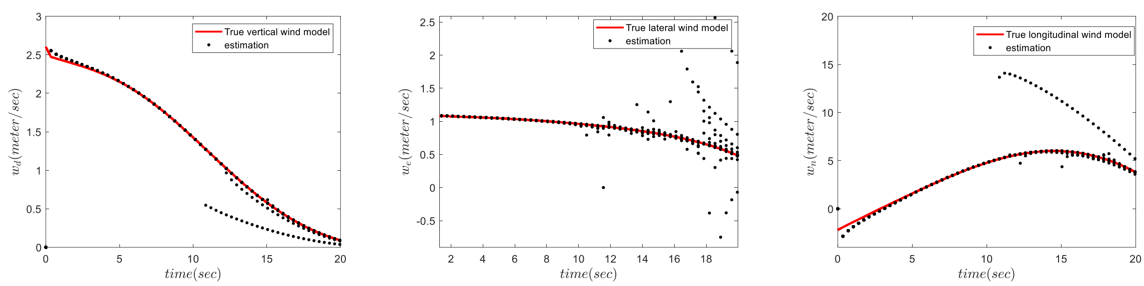
(الف)



(ب)



(ج)



(د)

شکل ۱۵.۵ تخمین باد نسبت به مقادیر مختلف کواریانس نویز فرآیند الف) باد ثابت ب) باد "1-cosine" ج) باد برشی د) مایکروبرست.

۷.۳.۵ تخمین مدل باد در حین مانور

به‌منظور بررسی حساسیت فیلتر چندمدلی MMWE به مانور پرنده، یک مانور طولی و عرضی شبیه‌سازی می‌شود. پرنده ابتدا در حالت تریم در ارتفاع ۱۰۰ متر و سرعت ۳۵ متر بر ثانیه پرواز می‌کند. سپس، مانور زیر در یک تراتل ثابت انجام می‌شود:

$$\begin{cases} \delta_e = 0 \text{ rad} \,\&\, \delta_a = 0 \text{ rad} & t \le 0.25\,\mathrm{t_f} \\ \delta_e = 0.1\text{rad} \,\&\, \delta_a = -0.1\text{rad} & 0.25\,\mathrm{t_f} < t \le 0.5\,\mathrm{t_f} \\ \delta_e = -0.1\text{rad} \,\&\, \delta_a = 0.1\text{rad} & 0.5\,\mathrm{t_f} < t \le \mathrm{t_f} \end{cases} \quad (۱۱.۵)$$

در رابطه فوق، t_f بیانگر زمان نهایی است. عملکرد فیلتر چندمدلی MMWE در تخمین مدل‌های باد در حین مانور در شکل ۱۶.۵ نشان داده شده‌است. نتایج حاکی از تخمین صحیح مولفه‌های باد توسط فیلتر چندمدلی MMWE در حین مانور پرنده است.

۸.۳.۵ تخمین مدل باد ترکیبی

در این بخش، باد واقعی به‌صورت ترکیبی از مدل باد ثابت با مدل‌های باد "1-cosine" یا باد برشی یا باد مایکروبرست فرض می‌شود. شکل ۱۷.۵ (الف) نشان می‌دهد که فیلتر MMWE قادر به شناسایی مدل باد ترکیبی ثابت-"1-cosine" است. همچنین، شکل ۱۷.۵ (ب) و (ج) نیز نشان می‌دهند که فیلتر چندمدلی MMWE به‌ترتیب قادر به تخمین صحیح مدل باد ترکیبی ثابت-برشی و نیز مدل باد ترکیبی ثابت-مایکروبرست است.

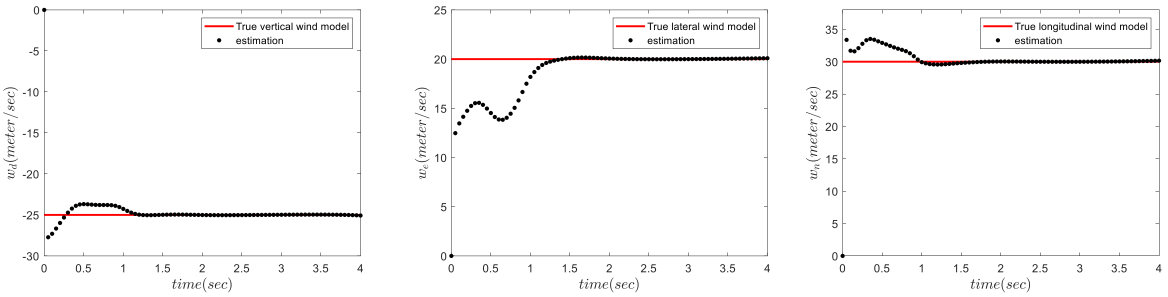
۹.۳.۵ تخمین مدل باد آغشته به اغتشاشات تصادفی

در این بخش، باد به‌صورت ترکیبی از باد معین و تصادفی بر طبق معادله (۴۶.۳) مدل می‌شود. عملکرد MMWE در حضور مدل باد تصادفی درایدن با توربولانس کم، که پارامترهای آن در جدول ۴.۳ نشان داده شده‌است، در شکل ۱۸.۵ نشان داده شده است. نتایج حاکی از عملکرد مناسب فیلتر چندمدلی MMWE به‌منظور تخمین مدل باد معین است، هنگامی‌که مدل باد معین با باد تصادفی ترکیب می‌شود.

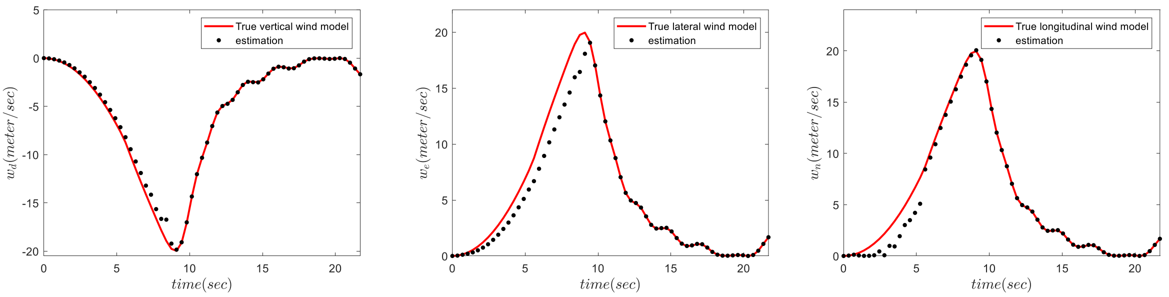
۱۰.۳.۵ مقایسه فیلتر چندمدلی تخمین باد با فیلتر کالمن توسعه‌یافته

در این بخش، عملکرد فیلتر چندمدلی تخمین باد MMWE با یک فیلتر تک مدلی EKF مقایسه می‌شود. فیلتر EKF از مدل تصادفی پرنده، که با مدل‌های باد ترکیب شده‌است، استفاده می‌کند. به‌این‌منظور، سرعت باد به‌صورت ترکیبی از چهار مدل باد بیان می‌شود:

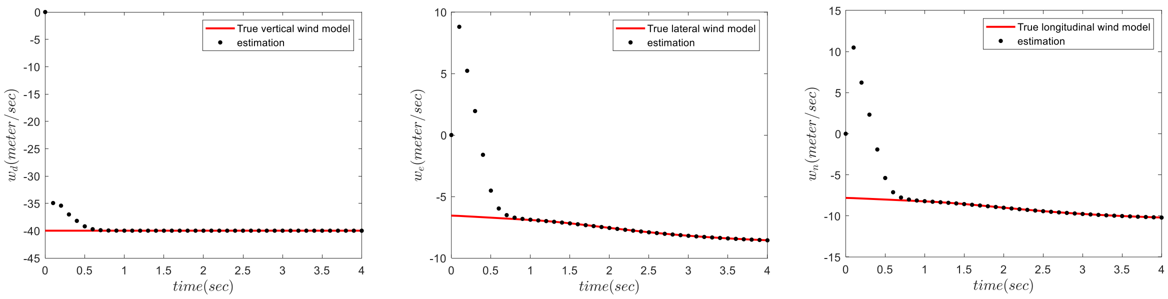
$$\mathbf{v}_{\mathbf{w}}^{\mathbf{N}} = \mathbf{v}_{\mathbf{w}_{\text{constant}}}^{\mathbf{N}} + \mathbf{C}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{N}}\, \mathbf{v}_{\mathbf{w}_{\text{1-cosine}}}^{\mathbf{B}} + \mathbf{v}_{\mathbf{w}_{\text{shear}}}^{\mathbf{N}} + \mathbf{v}_{\mathbf{w}_{\text{mb}}}^{\mathbf{N}} \tag{۱۲.۵}$$



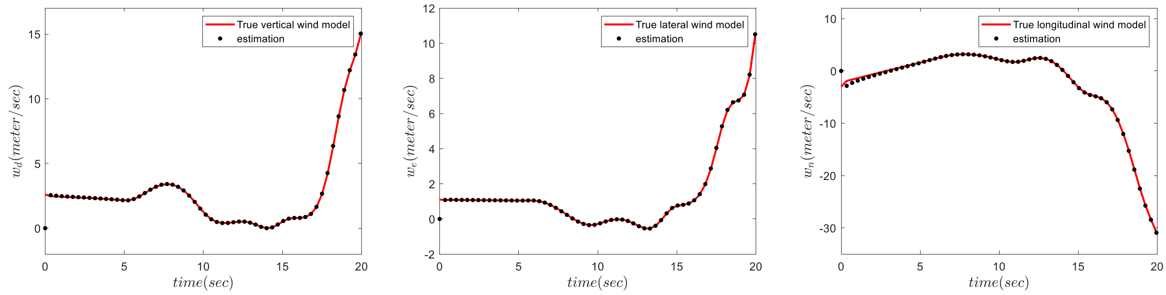
(الف)



(ب)

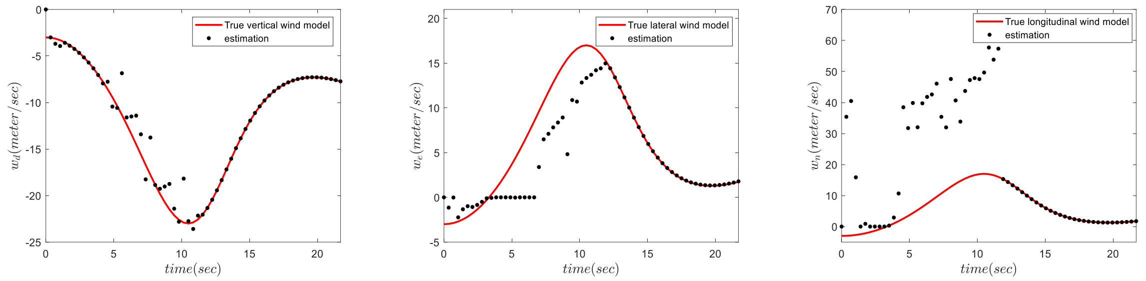


(ج)

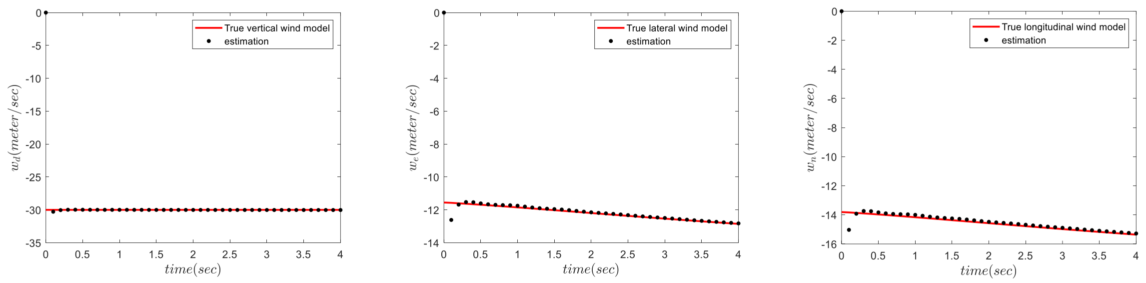


(د)

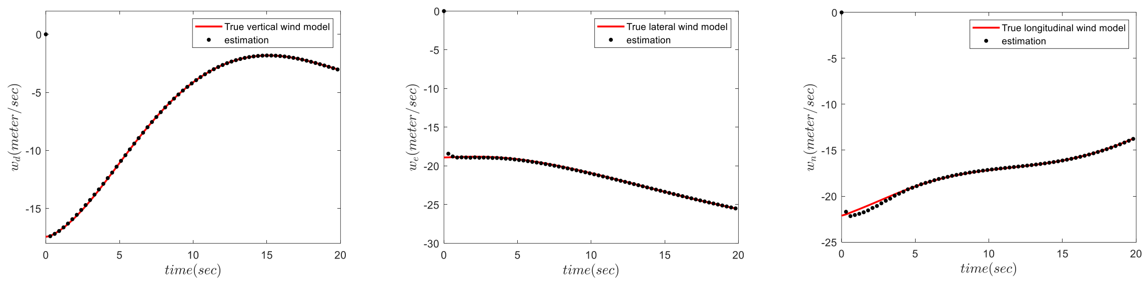
شکل ۱۶.۵ تخمین باد در حضور مانور الف) باد ثابت ب) باد ”1-cosine“ ج) باد برشی د) مایکروبرست.



(الف)

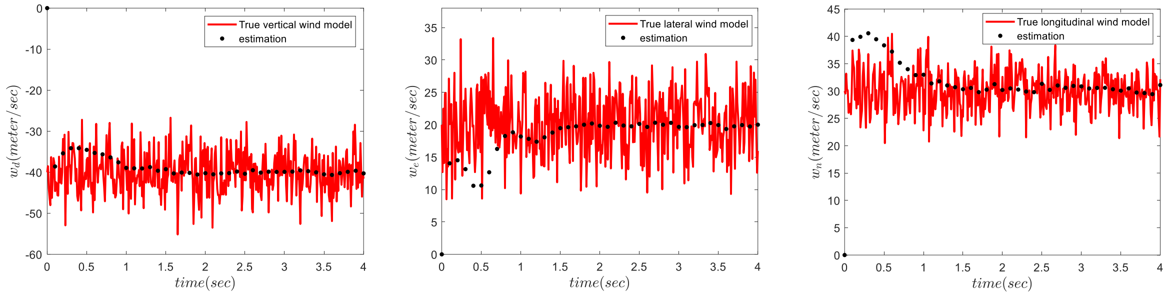


(ب)

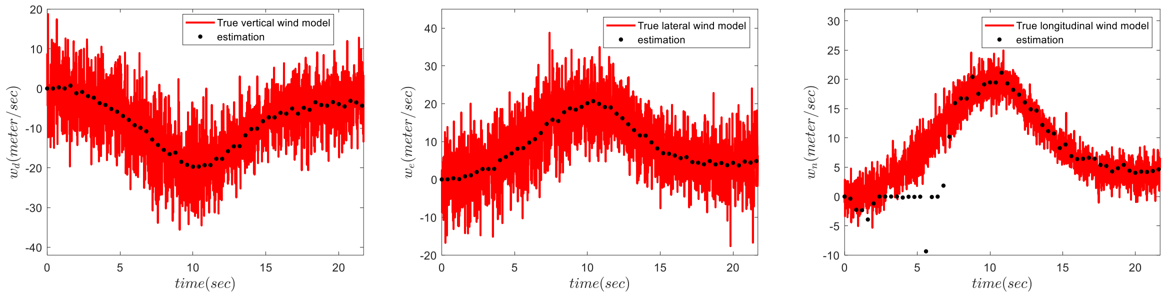


(ج)

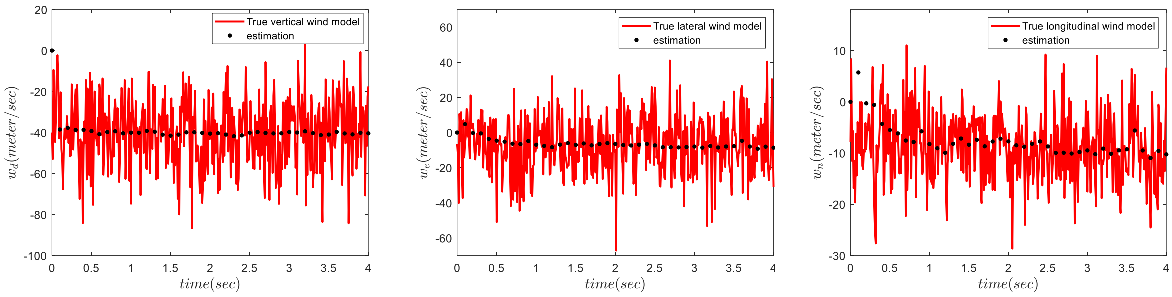
شکل ۱۷.۵ تخمین مدل باد ترکیبی: الف) باد ترکیبی ثابت-”1-cosine“ ب) باد ترکیبی ثابت-برشی ج) باد ترکیبی ثابت-مایکروبرست.



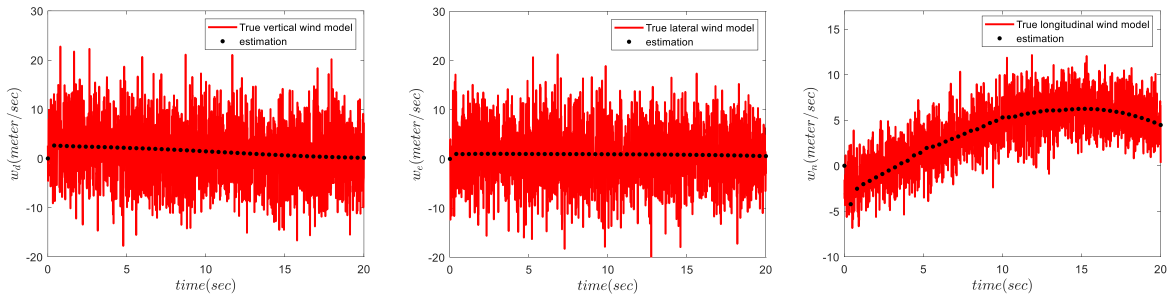
(الف)



(ب)



(ج)



(د)

شکل ۱۸.۵ تخمین مولفه‌های باد معین در حضور مدل باد تصادفی درایدن با توربولانس کم الف) باد ثابت ب) باد "1-cosine" ج) باد برشی د) مایکروبرست.

در این‌صورت، متغیرهای افزونه به‌صورت $x_{13}=w_{\mathrm{n_{constant}}}$، $x_{14}=w_{\mathrm{e_{constant}}}$، $x_{15}=w_{\mathrm{d_{constant}}}$، $x_{16}=\mathrm{u_m}$، $x_{17}=\mathrm{d_x}$، $x_{18}=\mathrm{v_m}$، $x_{19}=\mathrm{d_y}$، $x_{20}=\mathrm{w_m}$، $x_{21}=\mathrm{d_z}$، $x_{22}=\mathrm{w_{20}}$، $x_{23}=\psi_{\mathrm{w}}$، $x_{24}=\mathrm{x_c}$، $x_{25}=\mathrm{y_c}$، $x_{26}=\mathrm{h_{max}}$ و $x_{27}=\mathrm{r_{max}}$ تعریف می‌شوند. بنابراین، معادلات زیر به معادلات پرنده اضافه می‌شود:

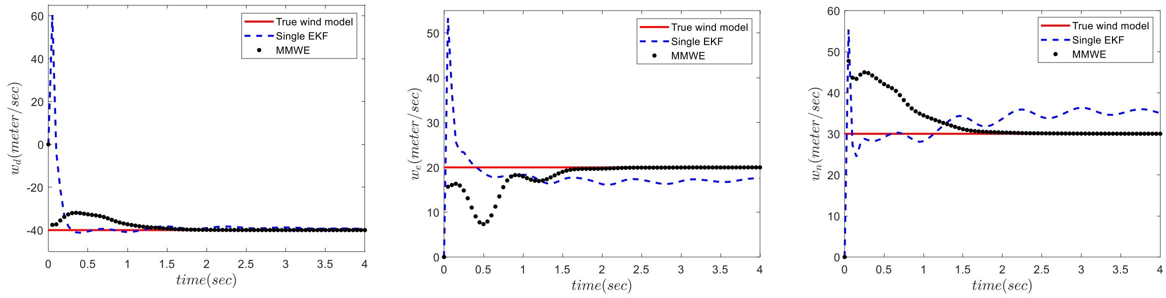
$$\dot{\mathbf{x}}_i=\boldsymbol{\omega}_i \quad \text{for } i=13,...,7 \tag{۱۳.۵}$$

در رابطه فوق، $\boldsymbol{\omega}_i$ به‌ازای i=13,...,27 بیانگر نویزهای سفید با میانگین صفر است. مدل تصادفی پرنده، که در فیلتر EKF استفاده می‌شود، از ترکیب معادلات (۱.۳) - (۴.۳) با معادله (۱۳.۵) حاصل می‌شود. فیلتر EKF به‌صورت هم‌زمان پارامترهای مرتبط با سرعت‌های باد (۱۶ پارامتر) و نیز متغیرهای حالت را تخمین می‌زند.

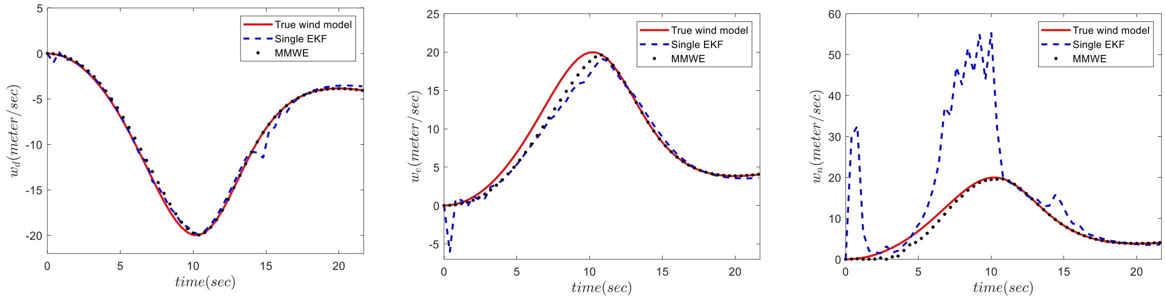
به‌منظور مقایسه عملکرد MMWE با فیلتر EKF، چهار آزمایش انجام می‌شود. فیلتر MMWE در حضور باد ثابت، باد "1-cosine"، باد برشی و مایکروبرست در شکل ۱۹.۵ با نتایج فیلتر EKF مقایسه می‌شود. در تمامی آزمایش‌ها، عملکرد فیلتر چندمدلی MMWE از فیلتر EKF بهتر است. نتایج فیلتر EKF در حضور بادهای ثابت و "1-cosine" قابل مقایسه با فیلتر چندمدلی MMWE است. درحالیکه، عملکرد فیلتر EKF در حضور باد برشی قابل قبول نبوده و در حضور مایکروبرست واگرا می‌شود. لازم به ذکر است که مدل دینامیکی، که در فیلتر EKF استفاده می‌شود، شامل تعداد زیادی متغیرهای افزونه است. در نتیجه، فرایند تخمین در فیلتر EKF دشوار است.

۱۱.۳.۵ مقایسه فیلتر چندمدلی تخمین باد با یک تخمین‌گر باد ثابت

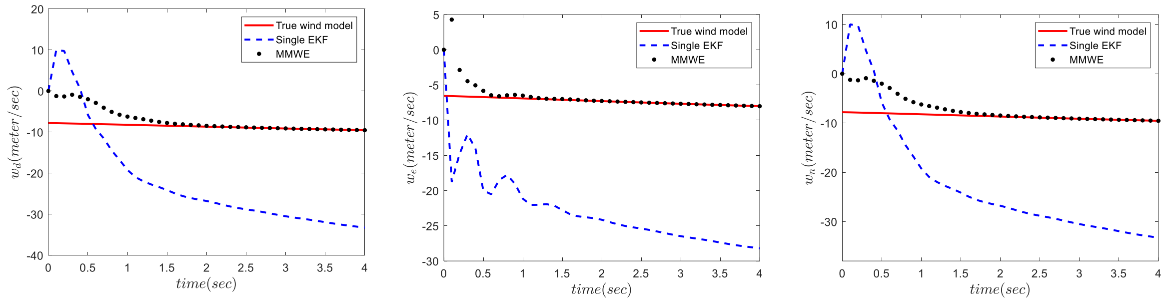
در این بخش، عملکرد فیلتر چندمدلی با تخمین‌گر باد ثابت، که در مرجع [۹۶] پیشنهاد شده‌است، مقایسه می‌شود. در مرجع [۹۶]، از یک فیلتر EKF به‌منظور تخمین مولفه‌های باد ثابت بر مبنای خروجی‌های GPS و ارتباط مثلث باد استفاده شده‌است. عملکرد این دو روش در شناسایی مولفه‌های سرعت باد ثابت در شکل ۲۰.۵ مقایسه شده‌است. این نتایج نشان می‌دهد که روش MMWE قادر به یافتن باد واقعی بهتر از روش پیشنهادی در مرجع [۹۶] است.



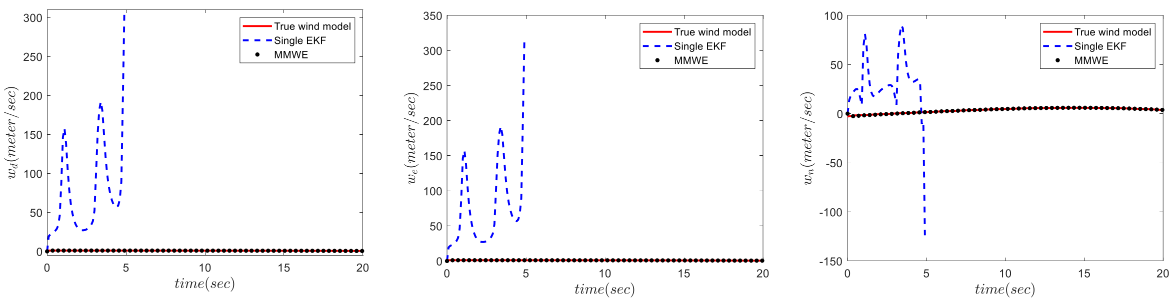
(الف)



(ب)

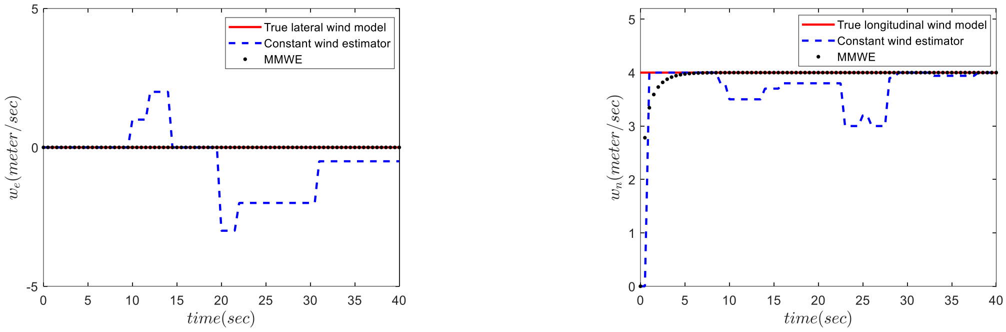


(ج)



(د)

شکل ۱۹.۵ مقایسه MMWE و یک فیلتر EKF در تخمین مولفه‌های باد الف) باد ثابت ب) باد "1- cosine" ج) باد برشی د) مایکروبرست.



شکل ۲۰.۵ تخمین باد ثابت با استفاده از MMWE و روش پیشنهادی در [۹۶].

۴.۵ نتیجه‌گیری

در این فصل، روش یک تخمین‌گر چندمدلی به‌منظور تخمین همزمان مدل باد، پارامترهای آن و متغیرهای حالت یک پرنده بدون سرنشین معرفی شد. در این روش، از چهار فیلتر کالمن توسعه‌یافته به‌منظور تخمین مدل باد ثابت، مدل باد "1-cosine"، مدل باد برشی و مدل مایکروبرست استفاده شد که هر کدام با یک مدل باد منطبق شده و به‌صورت جداگانه کار می‌کنند. نتایج شبیه‌سازی عددی به‌منظور بررسی عملکرد فیلتر چندمدلی تخمین باد در حضور مدل‌های باد بیان شد. از آنجا که مدل‌های باد کسینوسی و مایکروبرست و نیز هنگام مانور دارای نوساناتی است؛ لذا پرنده بهتر تحریک شده و در نتیجه متغیرهای حالت پرنده در هنگام وزش بادهای کسینوسی و مایکروبرست و نیز هنگام مانور با سرعت بیشتری شناسایی می‌شود. همچنین، عملکرد فیلتر چندمدلی پیشنهادی با یک فیلتر کالمن توسعه‌یافته مقایسه شد. نتایج حاکی از تخمین مناسب متغیرهای پرنده، نوع مدل باد و پارامترهای آن توسط فیلتر چندمدلی پیشنهاد شده است.

۶ توسعه فیلترهای چندمدلی ابتکاری

در این فصل، یک فیلتر چندمدلی ابتکاری مبتنی بر هوش جمعی به‌منظور تشخیص مدل سیستم غیرخطی و نیز تخمین متغیرهای حالت توسعه داده می‌شود. به این‌منظور، ابتدا در بخش ۱.۶ الگوریتم فیلتر چندمدلی توسعه‌یافته مبتنی بر سیستم پیوسته اجتماع مورچه‌ها (MMECACF)[۱] معرفی می‌شود. سپس، نتایج فیلتر چندمدلی پیشنهادی در تخمین مدل باد، پارامترهای آن و متغیرهای حالت پرنده در بخش ۲.۶ بیان می‌شود.

۱.۶ معرفی فیلتر چندمدلی ابتکاری

فیلتر چندمدلی توسعه‌یافته مبتنی بر سیستم پیوسته اجتماع مورچه‌ها (MMECACF) مشابه فیلتر چندمدلی معرفی‌شده در فصل قبل است؛ با این تفاوت که در آن به جای چند فیلتر کالمن توسعه‌یافته از چند فیلتر مبتنی بر سیستم پیوسته توسعه‌یافته اجتماع مورچه‌ها (ECACF)[۲] به‌صورت موازی استفاده می‌شود. در فیلتر ECACF، هر مورچه در زمان اندازه‌گیری بر مبنای فیلتر کالمن توسعه‌یافته (EKF)[۳] [۱۰۸] به‌روزرسانی شده و سپس گروهی از مورچه‌ها فضای حالت را به‌صورت تصادفی و دینامیکی به‌منظور یافتن و ردگیری بهترین مدل و بهترین تخمین متغیرهای حالت جستجو می‌کنند. الگوریتم ECACF در پیوست "ذ" به‌صورت مفصل تشریح می‌شود. همچنین، اعتبارسنجی این فیلتر در پیوست "ر" انجام می‌شود.

در فیلتر چندمدلی MMECACF، ابتدا فیلترهای ECACF برای هر مدل اجرا شده و سپس احتمال مرتبط با هر فیلتر محاسبه می‌شود. در گام بعد، مدل واقعی و متغیرهای حالت سیستم غیرخطی

---

[1] Multiple Model Extended Continuous Ant Colony Filter

[2] Extended Continuous Ant Colony Filter

[3] Extended Kalman Filter

بر مبنای میانگین وزن‌دار نتایج هر فیلتر محاسبه می‌شود. شبه کد الگوریتم MMECACF در شکل ۱.۶ نشان داده شده‌است. در ادامه، مراحل کاری فیلتر چندمدلی MMECACF به‌صورت مفصل توضیح داده می‌شود.

۱.۱.۶ مقداردهی اولیه

در الگوریتم فیلتر چندمدلی MMECACF، هر فیلتر مرتبط با یک مدل دارای پارامترهایی همچون تعداد مورچه‌ها (N) و تعداد بهترین مورچه‌های منتخب (N_t) است که باید قبل از اجرای الگوریتم مقداردهی شوند. همچنین، موقعیت اولیه مورچه j-ام ($\hat{\mathbf{x}}_{m,0}^{j}$) به‌صورت تصادفی تولید شده و ماتریس کواریانس متناظر با آن ($\mathbf{P}_{m,0}^{j}$) برای m=1,…,M و به‌ازای j=1,…,N تولید می‌شود. به‌علاوه، احتمال اولیه هر فیلتر، که با $\Pr_{m,0}$ بیان می‌شود، باید قبل از اجرای فیلتر چندمدلی MMECACF به‌صورت تصادفی مقداردهی شود.

۲.۱.۶ انتشار متغیرهای حالت و کواریانس

در iامین تکرار حلقه داخلی، موقعیت پیشین مورچه j-ام در زمان $k-1$ برای m-امین فیلتر منطبق با هر مدل، که با $\hat{\mathbf{x}}_{m,k-1|k-1}^{i,j}$ نمایش داده می‌شود، با استفاده از مدل فرآیند تصادفی به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\hat{\mathbf{x}}_{m,k|k-1}^{i,j} = \mathbf{f}_{m,k-1}(\hat{\mathbf{x}}_{m,k-1|k-1}^{i,j}, \boldsymbol{\delta}_{k-1}, \boldsymbol{\omega}_{m,k-1}^{i,j}) \qquad (۱.۶)$$

در رابطه فوق، $\boldsymbol{\omega}_{m,k-1}^{i,j}$ بیانگر بردار نویز فرآیند است که به‌صورت تصادفی بر مبنای تابع چگالی احتمال معلوم $\boldsymbol{\omega}_m$ تولید می‌شود. همچنین، ماتریس کواریانس پیشین مورچه j-ام در زمان k–1، که با $\mathbf{P}_{m,k-1|k-1}^{i,j}$ نمایش داده می‌شود، از رابطه زیر بر مبنای فیلتر کالمن توسعه یافته (EKF) محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{P}_{m,k|k-1}^{i,j} = \mathbf{F}_{m,k-1}^{i,j}\,\mathbf{P}_{m,k-1|k-1}^{i,j}\,\mathbf{F}_{m,k-1}^{i,j^{\mathrm{T}}} + \mathbf{Q}_m \qquad (۲.۶)$$

در رابطه فوق، $\mathbf{Q}_m$ بیانگر ماتریس کواریانس نویز فرآیند m-امین مدل اســت. همچنــین، $\mathbf{F}_{m,k-1}^{i,j}$ بیــانگر ماتریس انتقال متغیرهای حالت[1] هر فیلترِ منطبق با مدل است که به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\mathbf{F}_{m,k-1}^{i,j} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}_{m,k-1|k-1}^{i,j}} \tag{۳.۶}$$

۳.۱.۶ به‌روز رسانی اندازه‌گیری

موقعیت پسین مورچه j–ام در زمان k ($\hat{\mathbf{x}}_{m,k|k}^{i,j}$) بر مبنای یک ترکیب خطی از موقعیت پیشــین مورچــه j–ام ($\hat{\mathbf{x}}_{m,k|k-1}^{i,j}$) و اخــتلاف بــین انــدازه‌گیری واقعــی در زمــان k ($\mathbf{z}_k$) و انــدازه‌گیری پیش‌بینــی‌شــده ($\hat{\mathbf{z}}_{m,k|k-1}^{i,j}$) به‌صورت زیر بر اساس معادله به‌روزرسانی خروجی فیلتر کالمن توسعه‌یافته (EKF) محاسبه می‌شود:

$$\hat{\mathbf{x}}_{m,k|k}^{i,j} = \hat{\mathbf{x}}_{m,k|k-1}^{i,j} + \mathbf{K}_{m,k}^{i,j}(\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_{m,k|k-1}^{i,j}) \tag{۴.۶}$$

در رابطه فوق، $\hat{\mathbf{z}}_{m,k|k-1}^{i,j}$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}^{i,j} = \mathbf{h}_{m,k}(\hat{\mathbf{x}}_{m,k|k-1}^{i,j}) \tag{۵.۶}$$

و $\mathbf{K}_k^{i,j}$ بیانگر بهره کالمن مرتبط با فیلتر m-ام است که از رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\mathbf{K}_{m,k}^{i,j} = \mathbf{P}_{m,k|k-1}^{i,j}\mathbf{H}_{m,k}^{i,j^{\mathrm{T}}}(\mathbf{H}_{m,k}^{i,j}\mathbf{P}_{m,k|k-1}^{i,j}\mathbf{H}_{m,k}^{i,j^{\mathrm{T}}} + \mathbf{R}_m) \tag{۶.۶}$$

جاییکه، $\mathbf{R}_m$ بیانگر ماتریس‌های کواریانس اندازه‌گیری هر مدل است. همچنــین، $\mathbf{H}_{m,k}^{i,j}$ بیــانگر مــاتریس مشاهدات مرتبط با فیلتر m-ام است که به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\mathbf{H}_{m,k-1}^{i,j} = \left.\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}_{m,k|k-1}^{i,j}} \tag{۷.۶}$$

در نهایت، خروجی جاری فیلتر m-ام به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

[1] State Transition Matrix

$$\hat{\mathbf{z}}_{m,k|k}^{i,j}=\mathbf{h}_{m,k}(\hat{\mathbf{x}}_{m,k|k}^{i,j}) \quad (۸.۶)$$

۴.۱.۶ ارزیابی تابع هزینه

بر مبنای کیفیت خروجی تخمین‌زده‌شده توسط هر مورچه، تابع هزینه مورچه j-ام در زمان k و i-امین تکرار حلقه داخلی به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$c_{m,k|k}^{i,j}=\left(\mathbf{z}_k-\hat{\mathbf{z}}_{m,k|k}^{i,j}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{R}^{-1}\left(\mathbf{z}_k-\hat{\mathbf{z}}_{m,k|k}^{i,j}\right) \quad (۹.۶)$$

در رابطه فوق، $\mathbf{z}_k$ و $\hat{\mathbf{z}}_{m,k|k}^{i,j}$ به‌ترتیب بیانگر اندازه‌گیری واقعی و اندازه‌گیری تخمین‌زده‌شده هستند.

۵.۱.۶ حرکت مورچه‌ها

مورچه‌ها در فضای حالت از موقعیت جاری‌شان بر مبنای توزیع فرمون به مقصد بعدی حرکت می‌کنند. این حرکت مشابه با فیلتر پیوسته توده‌ای مورچه‌ها (CACF) با استفاده از یک تابع توزیع گوسی به‌صورت زیر مدل می‌شود:

$$\tau(\mathbf{x}_m)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{\mathrm{n}}{2}}\left|\mathbf{P}_{m,k|k}^{i}\right|^{\frac{1}{2}}}\exp\left(\frac{-\left(\mathbf{x}_m-\hat{\mathbf{x}}_{m,k|k}^{i,j_{\min}}\right)^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{P}_{m,k|k}^{i}\right)^{-1}\left(\mathbf{x}_m-\hat{\mathbf{x}}_{m,k|k}^{i,j_{\min}}\right)}{2}\right) \quad (۱۰.۶)$$

در رابطه فوق، n و $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{i,j_{\min}}$ به ترتیب بیانگر تعداد متغیرهای حالت و بهترین نقطه یافت‌شده در حلقه داخلی i-ام توسط m-امین فیلترِ منطبق با هر مدل است. همچنین، $\mathbf{P}_{m,k|k}^{i}$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{P}_{m,k|k}^{i}=\begin{bmatrix}\left(\sigma_{m,k}^{i}\right)_1^2 & \ldots & \ldots & \ldots & 0\\ 0 & \ddots & \ldots & \ldots & 0\\ \vdots & \ldots & \left(\sigma_{m,k}^{i}\right)_p^2 & \ldots & \vdots\\ \vdots & \ldots & \ldots & \ddots & \vdots\\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \left(\sigma_{m,k}^{i}\right)_{\mathrm{n}}^2\end{bmatrix} \quad (۱۱.۶)$$

در رابطه فوق، $(\sigma_{m,k}^{i})_p^2$ بیانگر واریانس تابع توزیع فرمون نرمال برای بعد p است. این پارامتر، بر اساس رابطه زیر و بر مبنای واریانس وزن‌دار، که در مرجع [۱۰۹] پیشنهاد شده‌است، به‌روزرسانی می‌شود:

$$\left(\sigma_{m,k}^{i}\right)_{p}^{2}=\frac{\sum_{j=1}^{\mathrm{N}}\frac{1}{c_{m,k}^{i,j}-c_{m,k}^{i,j_{\min}}}\left[\left(\hat{x}_{m,k|k}^{i,j}\right)_{p}-\left(\hat{x}_{m,k|k}^{i,j_{\min}}\right)_{p}\right]^{2}}{\sum_{j=1}^{\mathrm{N}}\frac{1}{c_{m,k}^{i,j}-c_{m,k}^{i,j_{\min}}}} \tag{۱۲.۶}$$

در رابطه فوق، $\left(\hat{x}_{m,k|k}^{i,j}\right)_{p}$ و $\left(\hat{x}_{m,k|k}^{i,j_{\min}}\right)_{p}$ به‌ترتیب بیانگر مولفه‌های $\hat{\mathbf{x}}_{m,k|k}^{i,j}$ و $\hat{\mathbf{x}}_{m,k|k}^{i,j_{\min}}$ در بعد p است. در این ساختار، پهن یا باریک بودن توزیع فرمون به تجمع مورچه‌هایی با بهترین کیفیت حول بهترین مورچه وابسته است [۱۰۹].

۶.۱.۶ اجرای فیلتر ECACF منطبق با هر مدل

پس از رسیدن به بیشینه تعداد تکرار مشخص ($i_{\max}$)، متغیرهای حالت ($\hat{\mathbf{x}}_{m,k|k}$)، ماتریس کواریانس ($\mathbf{P}_{m,k|k}$) و تابع احتمال[۱] ($L_{m,k|k}$) توسط فیلتر ECACF منطبق با مدل به‌صورت مستقل تخمین‌زده می‌شود. در این صورت، m-امین فیلتر متغیرهای حالت را به‌صورت زیر تخمین می‌زند:

$$\hat{\mathbf{x}}_{m,k|k}=\frac{1}{\mathrm{N_t}}\sum_{j=1}^{\mathrm{N_t}}\hat{\mathbf{x}}_{m,k|k}^{i_{\max},j} \tag{۱۳.۶}$$

در رابطه فوق، $\mathrm{N_t}$ بیانگر تعداد بهترین مورچه‌های منتخب است. همچنین، ماتریس کواریانس فیلتر m-ام منطبق با هر مدل بر مبنای روش انتگرال‌گیری مونت‌کارلو به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{P}_{m,k|k}=\frac{1}{\mathrm{N_t}}\sum_{j=1}^{\mathrm{N_t}}\left[\hat{\mathbf{x}}_{m,k|k}-\hat{\mathbf{x}}_{m,k|k}^{i_{\max},j}\right]\left[\hat{\mathbf{x}}_{m,k|k}-\hat{\mathbf{x}}_{m,k|k}^{i_{\max},j}\right]^{\mathrm{T}} \tag{۱۴.۶}$$

در نهایت، تابع احتمال منطبق با هر مدل به‌صورت زیر محاسبه می‌شود [۱۰۷]:

$$L_{m,k|k}\approx\exp\left(-\frac{\mathbf{r}_{m,k|k}{}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}_{m,k|k}{}^{-1}\mathbf{r}_{m,k|k}}{2}\right) \tag{۱۵.۶}$$

در رابطه فوق، $\mathbf{r}_{m,k|k}$ بیانگر باقیمانده[۲] m-امین فیلتر است، که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

[1] Likelihood

[2] Residual

$$\mathbf{r}_{m,k|k} = \mathbf{z}_k - \mathbf{H}_{m,k}\,\hat{\mathbf{x}}_{m,k|k} \tag{۱۶.۶}$$

همچنین، $\mathbf{S}_{m,k|k}$ نشان‌دهنده ماتریس کواریانس باقیمانده هر فیلتر است، که از رابطه $\mathbf{S}_{m,k|k} = \mathbf{H}_{m,k}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{P}_{m,k|k}\,\mathbf{H}_{m,k}$ حاصل می‌شود.

۷.۱.۶ به‌روزرسانی احتمال هر مدل

احتمال هر مدل بر مبنای رابطه زیر به‌روزرسانی می‌شود [۱۰۷]:

$$\Pr_{m,k} = \frac{L_{m,k|k}\,\Pr_{m,k-1}}{\sum_{m=1}^{\mathrm{M}} L_{m,k|k}\,\Pr_{m,k-1}} \tag{۱۷.۶}$$

لازم به ذکر است که مقدار اولیه احتمال ($\Pr_{m,0}$) قبل از اجرای فیلتر چندمدلی MMECACF به‌صورت تصادفی تعیین و نرمالیزه می‌شود.

۸.۱.۶ تخمین متغیرهای حالت و ماتریس کواریانس

بهترین تخمین متغیرهای حالت بر مبنای میانگین وزن‌دار نتایج فیلترهای منطبق با هر مدل به‌صورت زیر به‌روزرسانی می‌شود [۱۰۷]:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \sum_{m=1}^{\mathrm{M}} \Pr_{m,k}\,\hat{\mathbf{x}}_{m,k|k} \tag{۱۸.۶}$$

همچنین، ماتریس کواریانس متناظر با بهترین تخمین متغیرهای حالت به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{P}_{k|k} = \sum_{m=1}^{\mathrm{M}} \Pr_{m,k}\left(\mathbf{P}_{m,k-1|k-1} + \left[\hat{\mathbf{x}}_{m,k|k} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}\right]\left[\hat{\mathbf{x}}_{m,k|k} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}\right]^{\mathrm{T}}\right) \tag{۱۹.۶}$$

۹.۱.۶ تخمین مدل

در نهایت، بهترین مدل بر مبنای بالاترین احتمال شرطی به‌صورت زیر انتخاب می‌شود:

$$\hat{\mathrm{m}} = \arg\max_m \Pr_{m,k} \tag{۲۰.۶}$$

۲.۶ نتایج تخمین چندمدلی پدیده باد

در این بخش، فیلتر چندمدلی MMECACF به‌منظور تخمین توأمان متغیرهای حالت کانال طولی پرنده و نیز مدل باد بکار برده می‌شود. بلوک دیاگرام مساله تخمین چندمدلی پدیده باد در شکل ۲.۶ نشان داده شده‌است. به‌منظور بیان مدل تصادفی کانال طولی پرنده، مدل دینامیکی طولی پرنده (معادلات (۳۴.۳) تا (۳۸.۳)) و مدل خروجی به‌ترتیب با نویزهای فرایند و اندازه‌گیری آغشته می‌شوند. همچنین، فرض می‌شود که اندازه‌گیری‌های پرنده توسط GPS، جایرو نرخی و یک ارتفاع‌سنج فراهم می‌شود. همچنین، خروجی‌های سنسور به‌صورت خروجی‌های آغشته به نویز مدل می‌شود. فیلتر چندمدلی MMECACF با استفاده از خروجی‌های سنسور، متغیرهای کانال طولی پرنده و نیز مدل باد را تخمین می‌زند.

به‌منظور شبیه‌سازی فرض می‌شود که پرنده در ارتفاع ۵۰۰ فوت و سرعت ۱۰۰ فوت بر ثانیه تریم شده‌است. همچنین، پارامترهای مرتبط با شبیه‌سازی فیلتر چندمدلی MMECACF در پیوست"ز" بیان شده‌است. نتایج شبیه‌سازی عددی به‌منظور بررسی عملکرد فیلتر چندمدلی MMECACF تحت اثر باد ثابت، باد "1-cosine"، باد برشی و مایکروبرست به‌ترتیب در بخش‌های ۱.۲.۶، ۲.۲.۶، ۳.۲.۶ و ۴.۲.۶ بیان می‌شود. سپس، حساسیت فیلتر چندمدلی MMECACF به مانور طولی در بخش ۵.۲.۶ بررسی می‌شود. در نهایت، عملکرد فیلتر چندمدلی MMECACF با یک فیلتر ECACF و نیز فیلتر چندمدلی MMEKF به‌ترتیب در بخش‌های ۷.۲.۶ و ۸.۲.۶ مقایسه می‌شود.

۱.۲.۶ تخمین باد ثابت

در این بخش، تنها مدل باد ثابت به پرنده اعمال می‌شود؛ درحالیکه فیلتر MMECACF از نوع مدل باد ناآگاه است. احتمال هر مدل در شکل ۳.۶ (الف) نشان داده شده است. این شکل نشان می‌دهد که فیلتر MMECACF در کمتر از یک ثانیه به مدل واقعی همگرا می‌شود. همچنین، عملکرد مناسب فیلتر MMECACF در تخمین اندازه سرعت باد افقی (40 ft/sec) و اندازه سرعت باد عمودی (-50 ft/sec) به‌ترتیب در شکل ۳.۶ (ب) و (پ) نشان داده شده‌است. عملکرد فیلتر MMECACF در تخمین متغیرهای حالت پرنده در شکل ۳.۶ (ت) تا شکل ۳.۶ (ح) نشان داده شده است. نتایج حاکی از تخمین صحیح مدل باد و متغیرهای حالت پرنده توسط الگوریتم MMECACF است.

Set number of models, M, number of ants, N, and number of top ants, N_t.

Initialize randomly position of the ants, $\hat{\mathbf{x}}_{m,0}^{j}$, for $m \in [1,M]$ and $j \in [1,N]$.

Initialize covariance of the ants, $\mathbf{P}_{m,0}^{j}$, for $m \in [1,M]$ and $j \in [1,N]$.

Initialize probability of each model, $\Pr_{m,0}$, for $m \in [1,M]$.

While (Measurements are available)

  For *m*=1 to M

    For *i*=1 to i_{max}

      For *j*=1 to N

        Propagate priori position of ant *j*, $\hat{\mathbf{x}}_{m,k|k-1}^{i,j}$.

        Compute priori covariance, $\mathbf{P}_{m,k|k-1}^{i,j}$.

        Compute posteriori position of ant *j*, $\hat{\mathbf{x}}_{m,k|k}^{i,j}$.

        Estimate current output, $\hat{\mathbf{z}}_{m,k|k}^{i,j}$.

        Compute the cost function, $c_{m,k|k}^{i,j}$.

      Next ant *j*

      For *p*=1 to n

        Compute variance of the pheromone distribution, $\left(\sigma_{m,k}^{i}\right)_{p}^{2}$.

      Next dimension *p*

      Update covariance of the pheromone distribution, $\mathbf{P}_{m,k|k}^{i}$.

      For *j*=1 to N

        Move ants to the new destination, $\hat{\mathbf{x}}_{m,k|k}^{i,j}$, using the normal PDF.

      Next ant *j*

    Next iteration *i*

    Sort ants according to the cost.

    Compute mean position of N_t top ants, $\hat{\mathbf{x}}_{m,k|k}$.

    Compute the covariance, $\mathbf{P}_{m,k|k}$.

    Compute the likelihood function, $L_{m,k|k}$.

  Next model *m*

  Update probability of each model, $\Pr_{m,k}$.

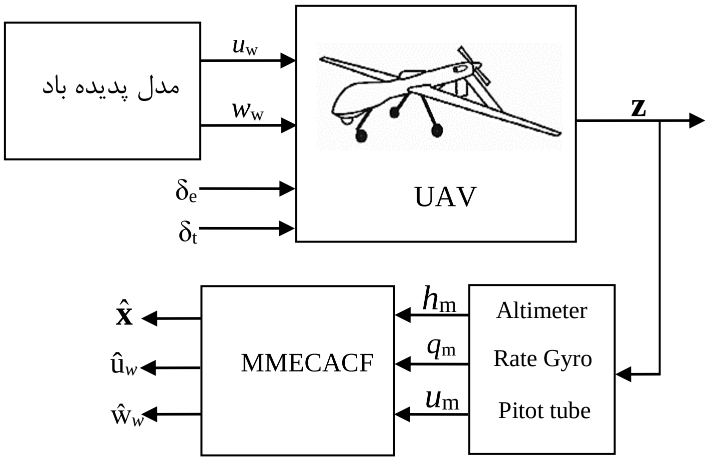
  Compute the best state estimate, $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$.

  Compute the best covariance, $\mathbf{P}_{k|k}$.

  Compute the best model estimate, $\hat{\mathrm{m}}$.

Next time step *k*

شکل ۱.۶ شبه‌کد فیلتر چندمدلی MMECACF.



شکل ۲.۶ الگوریتم تخمین چندمدلی پدیده باد.

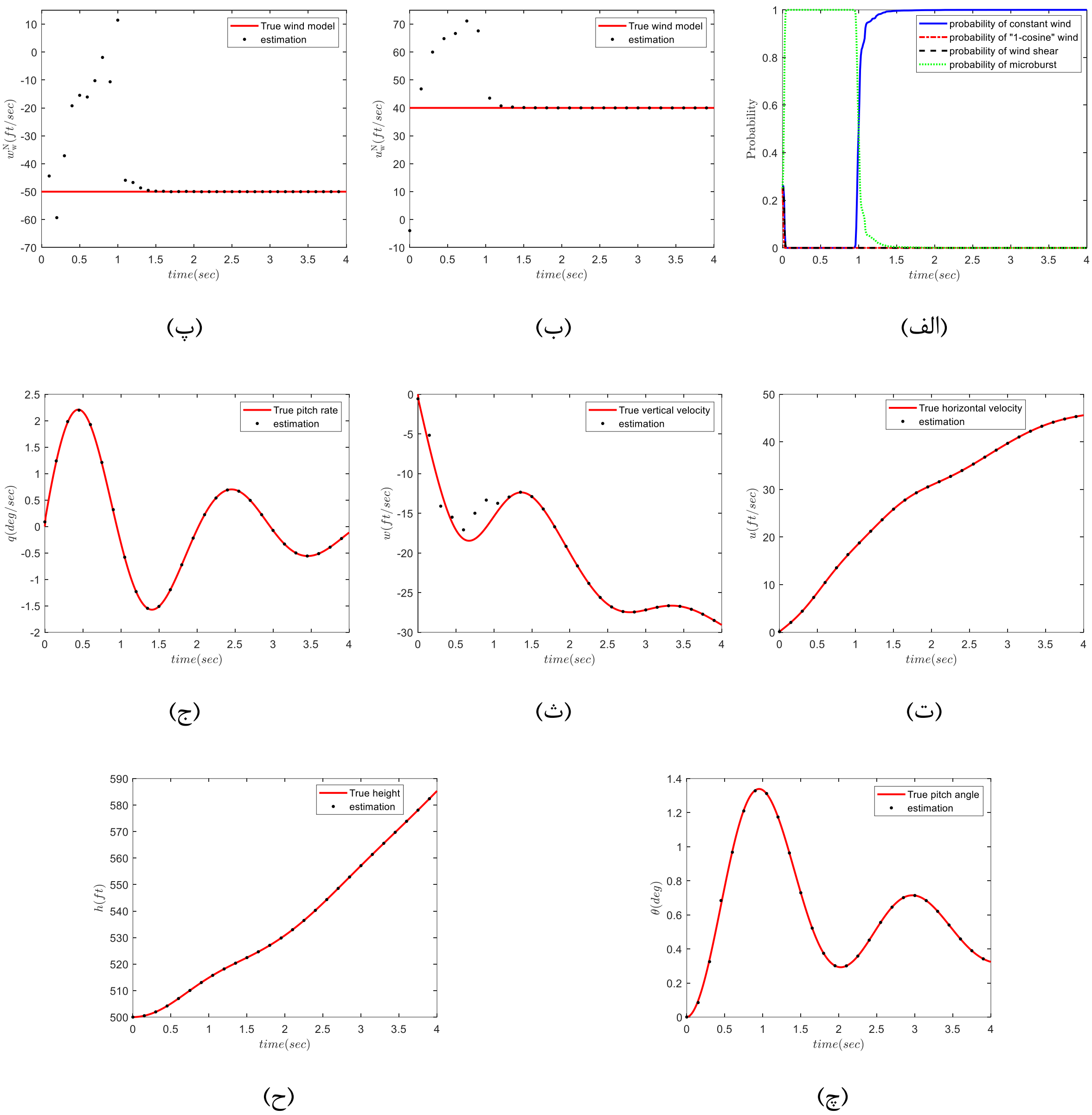
۲.۲.۶ تخمین باد ”1-cosine“

در این بخش، فیلتر چندمدلی MMECACF از مدل باد ”1-cosine“ ناآگاه است. شکل ۴.۶ (الف) نشان می‌دهد که فیلتر MMECACF به مدل صحیح همگرا می‌شود. عملکرد فیلتر MMECACF در تخمین بادهای افقی و عمودی به‌ترتیب در شکل ۴.۶ (ب) و شکل ۴.۶ (پ) نشان داده شده‌است. اندازه باد واقعی (30 ft/sec) و تخمین‌زده‌شده و نیز طول موج باد واقعی (80 ft) و تخمین‌زده‌شده به‌ترتیب در شکل ۴.۶ (ت) و شکل ۴.۶ (ث) نشان داده شده‌است. همچنین، عملکرد فیلتر چندمدلی MMECACF در تخمین پارامترهای باد عمودی در شکل ۴.۶ (ج) تا شکل ۴.۶ (چ) نشان داده شده‌است. تخمین متغیرهای پرنده در شکل ۴.۶ (ح) تا شکل ۴.۶ (ر) نشان داده شده‌است. نتایج حاکی از عملکرد دقیق فیلتر چندمدلی MMECACF است؛ هنگامی‌که پدیده باد ”1-cosine“ به پرنده اعمال می‌شود.

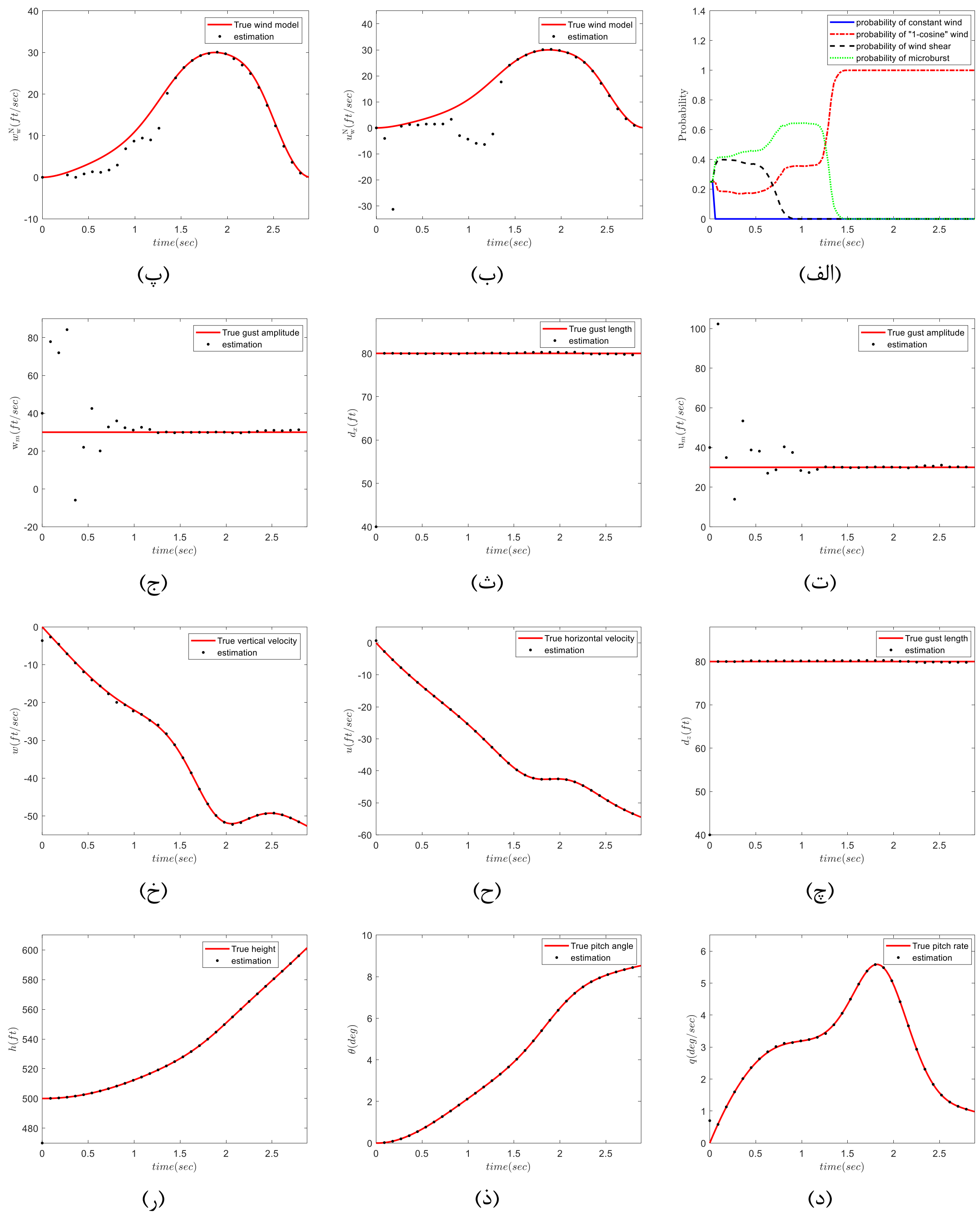
۳.۲.۶ تخمین باد برشی

در این بخش، عملکرد فیلتر چندمدلی MMECACF در حضور باد برشی ارزیابی می‌شود. احتمال هر مدل در شکل ۵.۶ (الف) نشان داده شده است. این شکل بیانگر همگرایی فیلتر MMECACF به مدل باد برشی در کسری از ثانیه است. همچنین، شکل ۵.۶ (ب) و شکل ۵.۶ (پ) به‌ترتیب بیانگر عملکرد مناسب فیلتر در تخمین مولفه‌های باد برشی است. به علاوه، سرعت باد واقعی و تخمین‌زده‌شده در ارتفاع ۲۰ فوت در شکل ۵.۶ (ت) نشان داده شده است. مقدار تخمین‌زده‌شده به مقدار واقعی (20 ft/sec) همگرا می‌شود. همچنین، تخمین متغیرهای حالت پرنده در شکل ۵.۶ (ث) تا شکل ۵.۶ (خ) نشان داده

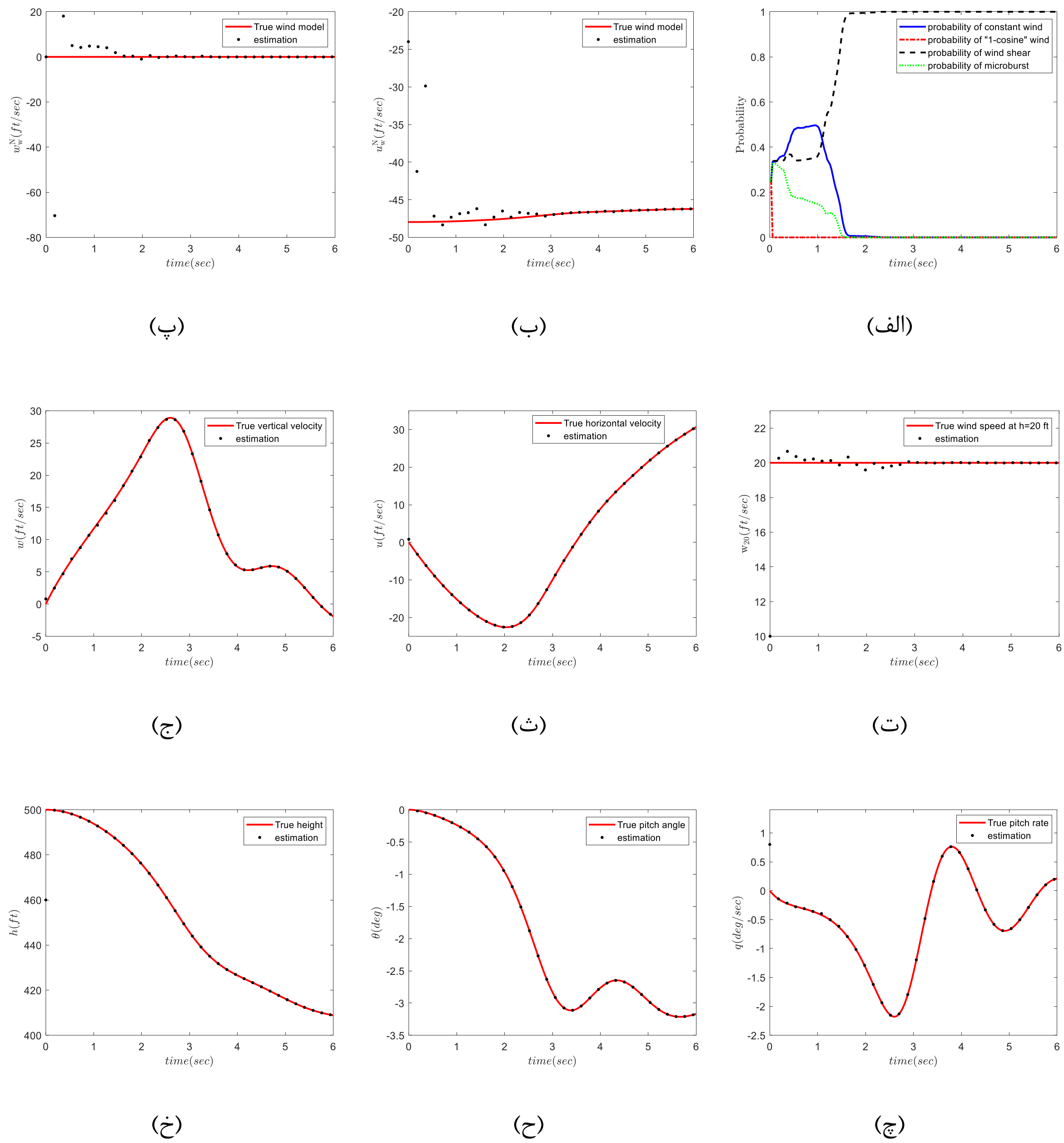
شده‌است. نتایج حاکی از تخمین درست متغیرهای پرنده، نوع مدل باد و پارامترهای آن توسط الگـوریتم MMECACF است.



شکل ۳.۶ تخمین باد ثابت: الف) احتمال هر مدل ب) باد افقی پ) باد عمودی ت) سرعت افقی ث) سرعت عمودی ج) نرخ پیچ چ) زاویه پیچ ح) ارتفاع.



شکل ۴.۶ تخمین باد "1-cosine": الف) احتمال هر مدل ب) باد افقی پ) باد عمودی ت) و ث) پارامترهای باد افقی ج) و چ) پارامترهای باد عمودی ح) سرعت طولی خ) سرعت عمودی د) نرخ پیچ ذ) زاویه پیچ ر) ارتفاع.



شکل ۵.۶ تخمین باد برشی: الف) احتمال هر مدل ب) باد افقی پ) باد عمودی ت) سرعت باد در h=20 ft ث) سرعت طولی ج) سرعت عمودی چ) نرخ پیچ چ) زاویه پیچ ح) ارتفاع.

۴.۲.۶ تخمین مایکروبرست

در این بخش، مدل مایکروبرست به پرنده بدون سرنشین اعمال می‌شود. عملکـرد فیلتـر MMECACF در حضور مایکروبرست در شکل ۶.۶ نشان داده شده‌است. احتمال هر مـدل در شـکل ۶.۶ (الـف)

نشـان داده شده‌اسـت. همچنـین، شـکل ۶.۶ (ب) و شـکل ۶.۶ (پ) بیـانگر عملکـرد فیلتـر در تخمـین مولفه‌های مایکروبرست است. عملکرد مناسب فیلتر MMECACF در تخمین پارامترهای مایکروبرسـت در شـکل ۶.۶ (ت) و شـکل ۶.۶ (ث) نشـان داده شده‌اسـت. مرکـز واقعـی برسـت (100 ft) و مقـدار تخمین‌زده‌شده در شکل ۶.۶ (ت) مقایسه می‌شود. همچنین، فاصله شعاعی واقعی از مرکز برست (3678 ft) و مقدار تخمین‌زده‌شده در شکل ۶.۶ (ث) نشان داده شده‌است. عملکـرد مناسـب فیلتـر در تخمـین متغیرهای حالت در شکل ۶.۶ (ج) تا شکل ۶.۶ (د) نشان داده شده‌است. نتایج حاکی از عملکرد صـحیح الگوریتم MMECACF در حضور مایکروبرست است.

۵.۲.۶ تخمین مدل باد در حین مانور

به‌منظور بررسی حساسیت روش MMECACF به مانور پرنده، یک مانور طولی شبیه‌سازی می‌شـود. در این‌صورت، پرنده ابتدا در پرواز تریم در ارتفاع ۵۰۰ فوت و سرعت ۱۰۰ فوت بر ثانیـه قـرار دارد. سـپس مانور طولی با اعمال فرمان زیر در یک تراتل ثابت انجام می‌شود:

$$\begin{cases} \delta_e = 0\ \text{rad} & t \le 0.25\,\mathrm{t_f} \\ \delta_e = 0.1\text{rad} & 0.25\,\mathrm{t_f} < t \le 0.5\,\mathrm{t_f} \\ \delta_e = -0.1\text{rad} & 0.5\,\mathrm{t_f} < t \le \mathrm{t_f} \end{cases} \tag{۲۱.۶}$$

در رابطه فوق، $\mathrm{t_f}$ بیانگر زمان نهایی است. عملکرد فیلتر چندمدلی MMECACF در تخمـین مـدل‌های باد در حضور مانور طولی در شکل ۷.۶ نشان داده شده‌است. این نتایج نشان می‌دهد که روش پیشنهادی قادر به تخمین صحیح مولفه‌های باد در حین مانور پرنده است.

۶.۲.۶ تخمین مدل باد ترکیبی

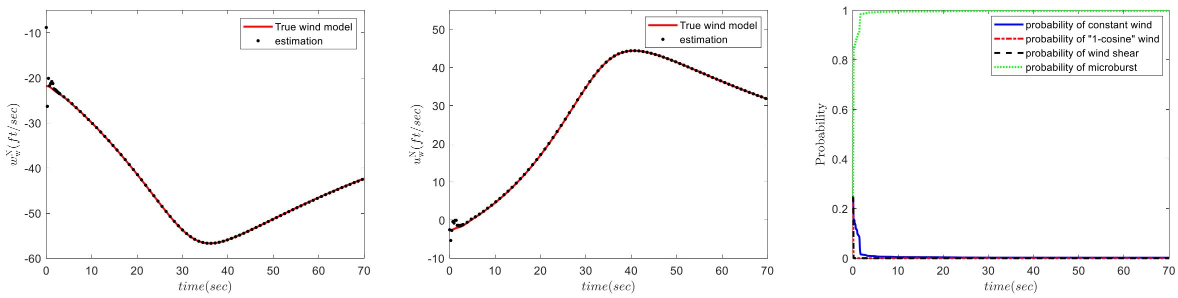
در این بخش، باد واقعی به‌صورت ترکیبی از مدل باد ثابت با مدل‌های باد "1-cosine" یا باد برشی یا باد مایکروبرست فرض می‌شود. عملکرد فیلتر چندمدلی MMECACF، هنگامی‌که مدل باد ثابت بـا مـدل باد "1-cosine" ترکیب شده‌است، در شکل ۸.۶ (الف) نشان داده شده‌است. نتـایج مـدل بـاد ترکیبـی ثابت-برشی و نیز ثابت-مایکروبرست به ترتیب در شکل ۸.۶ (ب) و (ج) نشان داده شده‌است. ایـن نتـایج نشان می‌دهد که فیلتر چندمدلی MMECACF قادر به تخمین صحیح مدل باد ترکیبی است.

۷.۲.۶ مقایسه با یک فیلتر مبتنی بر سیستم پیوسته توسعه‌یافته اجماع مورچه‌ها

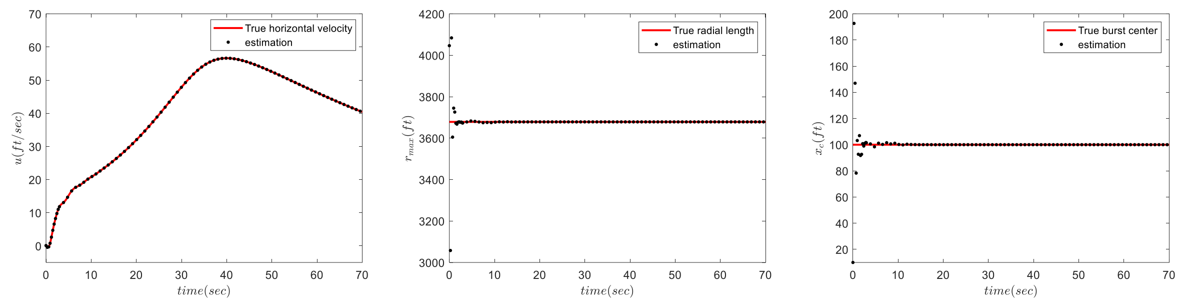
در این بخش، عملکرد فیلتر چندمدلی MMECACF با فیلتر تک مدلی ECACF مقایسه می‌شود. فیلتر ECACF از مدل پرنده همراه با مدل ترکیبی باد استفاده می‌کند. به‌این‌منظور، مدل‌های باد به‌صورت زیر ترکیب می‌شوند:

$$u_{\mathrm{w}}^{\mathrm{N}} = u_{\mathrm{w}_{\mathrm{constant}}}^{\mathrm{N}} + u_{\mathrm{w}_{\mathrm{1\text{-}cosine}}}^{\mathrm{N}} + u_{\mathrm{w}_{\mathrm{wind\ shear}}}^{\mathrm{N}} + u_{\mathrm{w}_{\mathrm{microburst}}}^{\mathrm{N}} \tag{۲۲.۶}$$

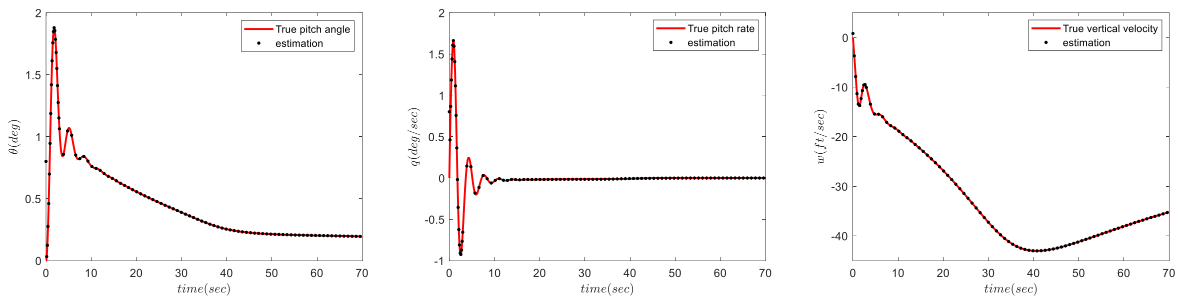
$$w_{\mathrm{w}}^{\mathrm{N}} = w_{\mathrm{w}_{\mathrm{constant}}}^{\mathrm{N}} + w_{\mathrm{w}_{\mathrm{1\text{-}cosine}}}^{\mathrm{N}} + w_{\mathrm{w}_{\mathrm{wind\ shear}}}^{\mathrm{N}} + w_{\mathrm{w}_{\mathrm{microburst}}}^{\mathrm{N}} \tag{۲۳.۶}$$



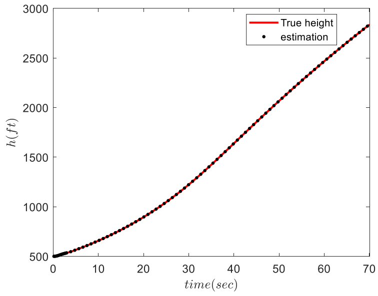
(الف) (ب) (پ)



(ت) (ث) (ج)

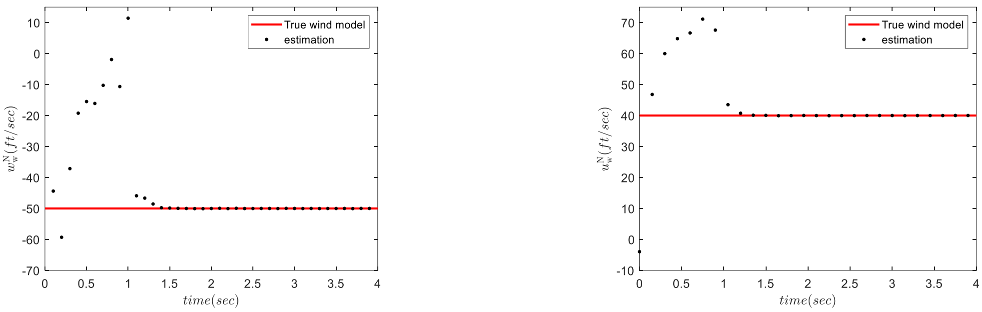


(چ) (ح) (خ)

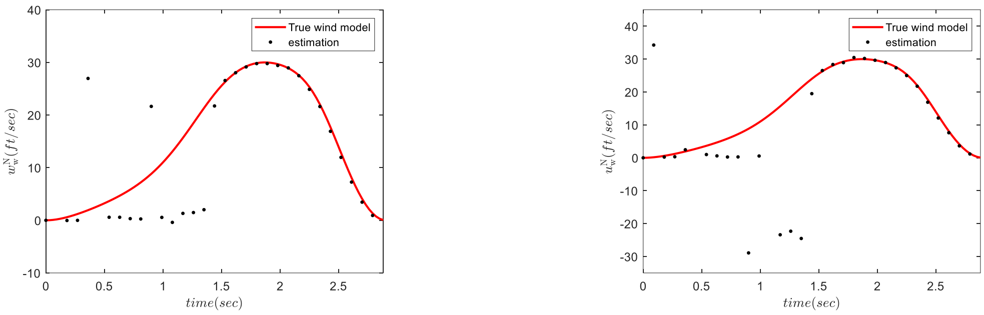


(د)

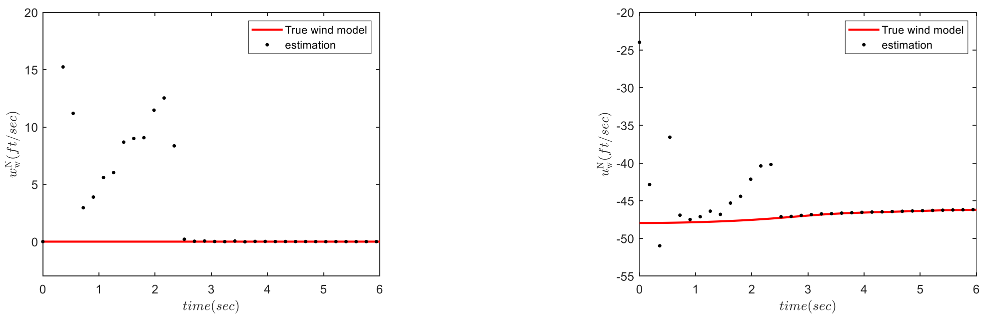
شکل ۶.۶ تخمین مایکروبرست: الف) احتمال هر مدل ب) باد افقی پ) باد عمودی ت) مرکز برست ث) فاصله شعاعی از مرکز برست ج) سرعت افقی چ) سرعت عمودی ح) نرخ پیچ خ) زاویه پیچ د) ارتفاع.



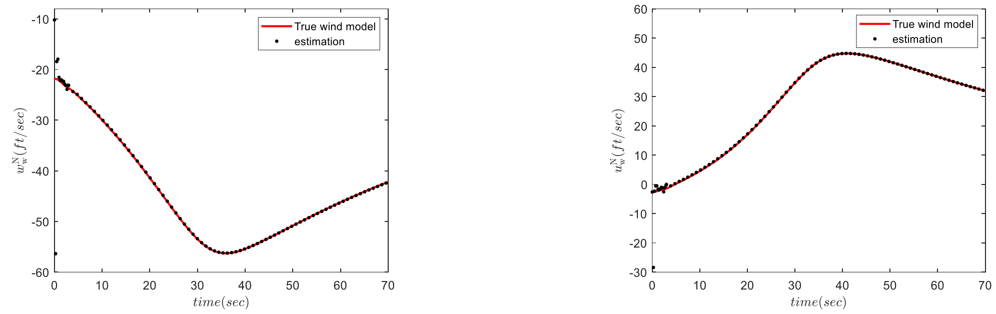
(الف)



(ب)

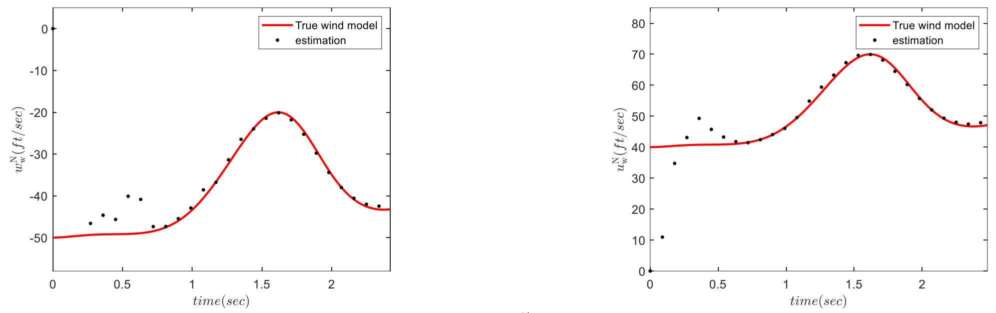


(ج)

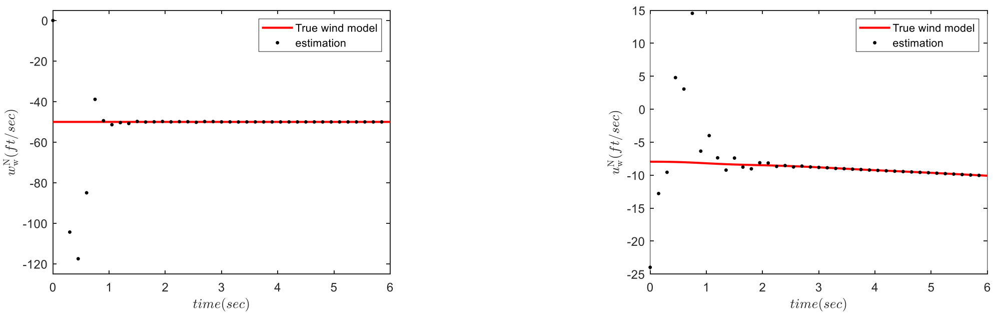


(د)

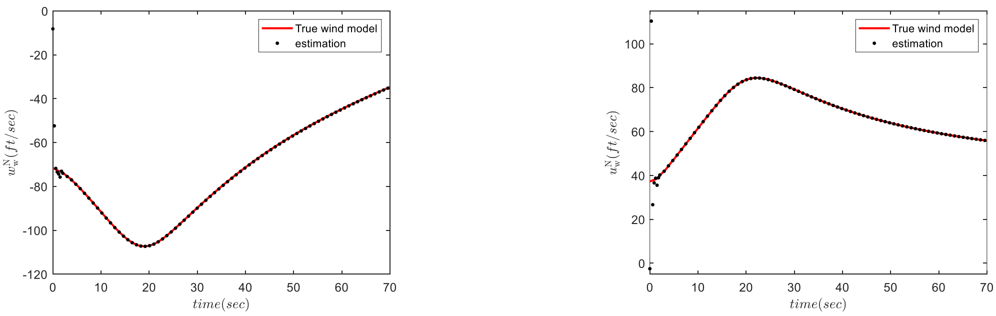
شکل ۷.۶ تخمین مدل باد در حضور مانور: الف) باد ثابت ب) باد "1-cosine" ج) باد برشی د) مایکروبرست.



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۸.۶ تخمین مدل باد ترکیبی: الف) باد ترکیبی ثابت-"1-cosine" ب) باد ترکیبی ثابت-برشی ج) باد ترکیبی ثابت-مایکروبرست.

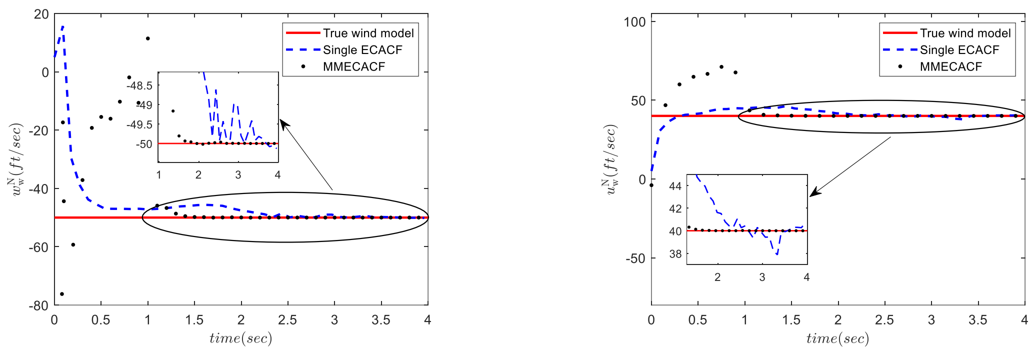
در این‌صورت، متغیرهای افزونه به‌صورت $x_6 = u^{N}_{w_{constant}}$، $x_7 = w^{N}_{w_{constant}}$، $x_8 = u_m$، $x_9 = d_x$، $x_{10} = w_m$، $x_{11} = d_z$، $x_{12} = w_{20}$، $x_{13} = x_c$، $x_{14} = h_{max}$ و $x_{15} = r_{max}$ تعریف می‌شوند. بنابراین، معادلات زیر به معادلات پرنده اضافه می‌شود:

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \boldsymbol{\omega}_i \qquad \text{for} \quad i = 6,\ldots,15 \tag{۲۴.۶}$$

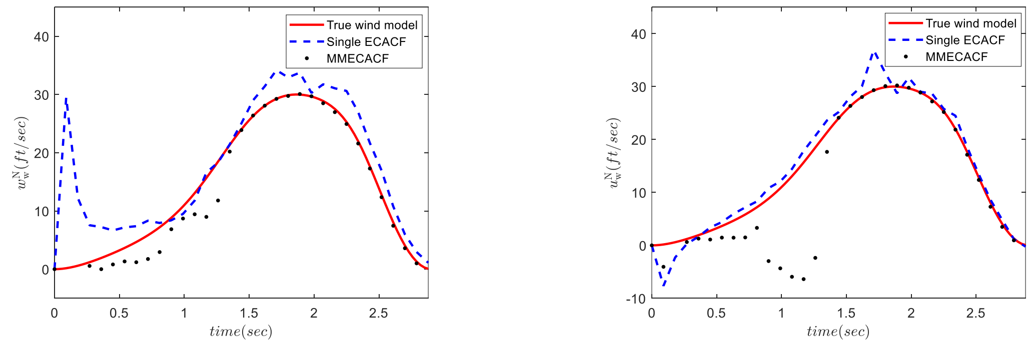
در رابطه فوق، $\boldsymbol{\omega}_i$ به‌ازای i=6,...,15 بیانگر نویزهای سفید با میانگین صفر است. فیلتر ECACF به‌صورت همزمان پارامترهای مرتبط با سرعت‌های باد (۱۰ پارامتر) و نیز متغیرهای حالت را تخمین می‌زند.

چهار آزمایش به‌منظور مقایسه عملکرد فیلتر MMECACF با فیلتر ECACF طراحی شده‌است. در اولین آزمایش، باد ثابت به پرنده بدون سرنشین اعمال شده‌است. شکل ۹.۶ نشان می‌دهد که عملکرد فیلتر MMECACF در تخمین سرعت باد ثابت بهتر از فیلتر ECACF است. در آزمایش دوم، عملکرد هر دو فیلتر تحت تاثیر مدل باد "1-cosine" بررسی می‌شود. شکل ۱۰.۶ نشان می‌دهد که فیلتر ECACF قادر به تخمین مولفه‌های باد "1-cosine" به‌صورت دقیق نیست.

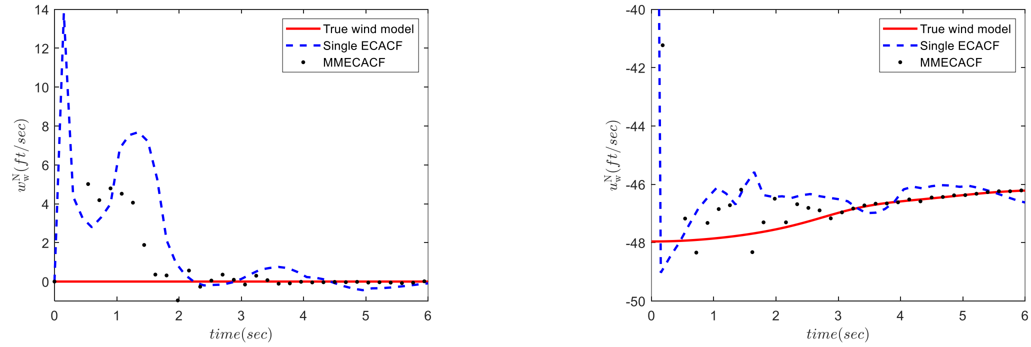
در سومین آزمایش، عملکرد هر دو فیلتر در حضور باد برشی بررسی می‌شود. شکل ۱۱.۶ نشان می‌دهد که نتایج فیلتر MMECACF بهتر از فیلتر ECACF است. در نهایت، شکل ۱۲.۶ نشان می‌دهد که فیلتر ECACF نمی‌تواند به‌صورت دقیق در حضور مایکروبرست اعمالی به پرنده کار کند. ازآنجاکه فیلتر MMECACF به‌روزرسانی بهینه‌ای را بر مبنای مشاهدات برای هر مدل باد به‌صورت جداگانه انجام می‌دهد؛ لذا دارای نتایج بهتری نسبت به فیلتر ECACF است.



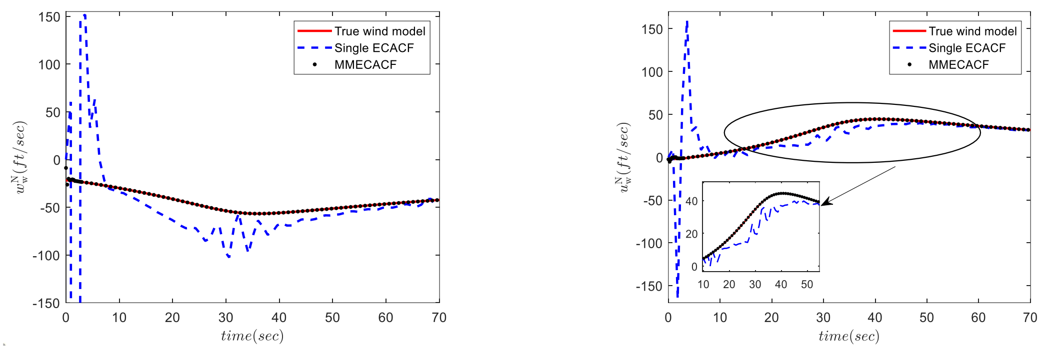
شکل ۹.۶ تخمین باد ثابت با استفاده از MMECACF و ECACF.



شکل ۱۰.۶ تخمین باد ”1-cosine“ با استفاده از MMECACF و ECACF.



شکل ۱۱.۶ تخمین باد برشی با استفاده از MMECACF و ECACF.

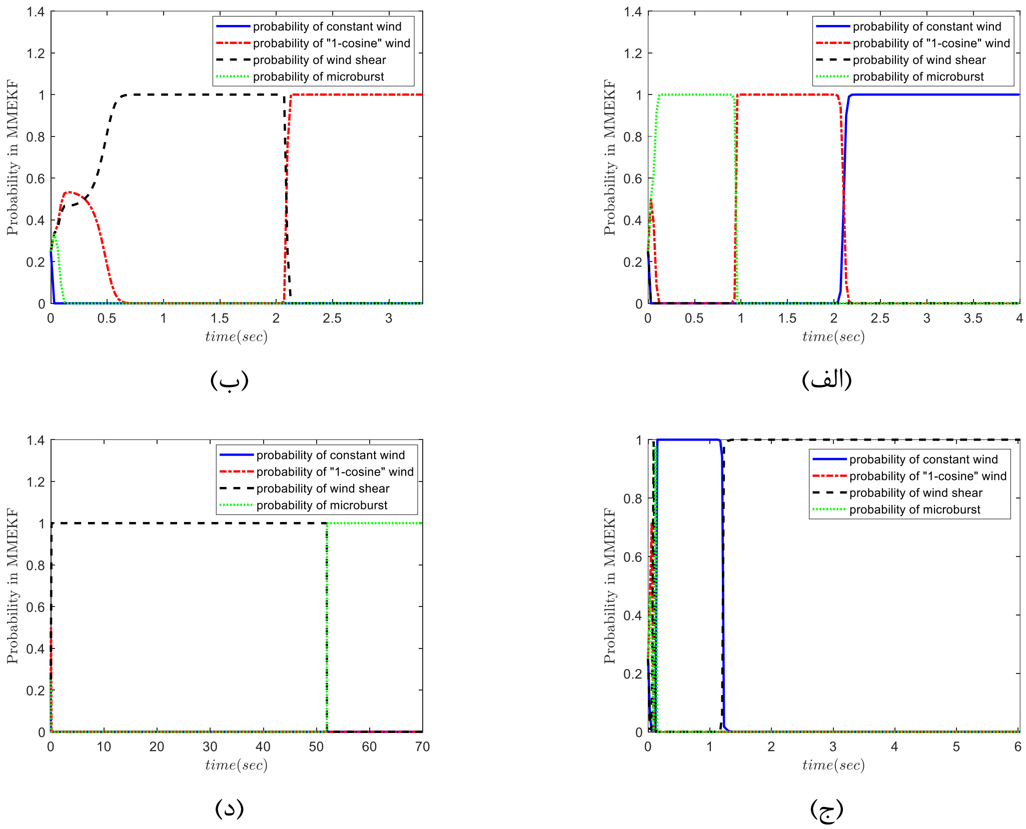


شکل ۱۲.۶ تخمین مایکروبرست با استفاده از MMECACF و ECACF.

۸.۲.۶ مقایسه با فیلتر کالمن چندمدلی توسعه‌یافته

در این بخش، عملکرد فیلترهای چندمدلی MMECACF و MMEKF بر مبنای احتمال تخمین‌زده‌شده با یکدیگر مقایسه می‌شود. عملکرد فیلتر چندمدلی MMEKF در شناسایی مدل باد

ثابت در شکل ۱۳.۶ (الف) نشان داده شده‌است. این شکل قابل مقایسه با احتمال تخمین‌زده‌شده توسط فیلتر چندمدلی MMECACF در شکل ۳.۶ (الف) است. همچنین، نتایج هر دو فیلتر MMECACF و MMEKF در شناسایی باد "1-cosine" به‌ترتیب در شکل ۴.۶ (الف) و شکل ۱۳.۶ (ب) نشان داده شده‌است. شکل ۵.۶ (الف) و شکل ۱۳.۶ (ج) احتمال تخمین‌زده‌شده توسط باد برشی را با یکدیگر مقایسه می‌کند. در نهایت، شکل ۶.۶ (الف) و شکل ۱۳.۶ (د) نشان می‌دهد که فیلتر چندمدلی MMEKF نمی‌تواند در حضور مایکروبرست به‌صورت دقیق کار کند. همچنین، این نتایج نشان می‌دهد که فیلتر چندمدلی پیشنهادی MMECACF قادر به یافتن مدل باد بهتر و سریعتر از فیلتر چندمدلی MMEKF است.



شکل ۱۳.۶ احتمال تخمین‌زده شده از هر فیلتر با استفاده از MMEKF الف) باد ثابت ب) باد "1-cosine" ج) باد برشی د) مایکروبرست.

۳.۶ نتیجه‌گیری

در این فصل، ابتدا یک فیلتر ابتکاری با نام فیلتر چندمدلی توسعه‌یافته مبتنی بر سیستم پیوسته اجماع مورچه‌ها (MMECACF) ارائه شد. سپس، این فیلتر به‌منظور تخمین مدل باد، پارامترهای آن و متغیرهای حالت پرنده بدون سرنشین استفاده شد. در این روش، از چهار فیلتر مبتنی بر سیستم پیوسته توسعه‌یافته اجماع مورچه‌ها (ECACF) به‌منظور تخمین مدل باد ثابت، مدل باد ”1-cosine“، مدل باد برشی و مدل مایکروبرست استفاده شد که هر کدام با یک مدل باد منطبق شده و به‌صورت جداگانه کار می‌کنند. نتایج شبیه‌سازی عددی به‌منظور بررسی عملکرد فیلتر MMECACF در حضور مدل‌های باد بیان شد. همچنین، عملکرد فیلتر MMECACF با یک فیلتر ECACF و نیز با فیلتر چندمدلی کالمن توسعه‌یافته (MMEKF) مقایسه شد. نتایج حاکی از تخمین مناسب متغیرهای پرنده، نوع مدل باد و پارامترهای آن توسط الگوریتم چندمدلی پیشنهادی است.

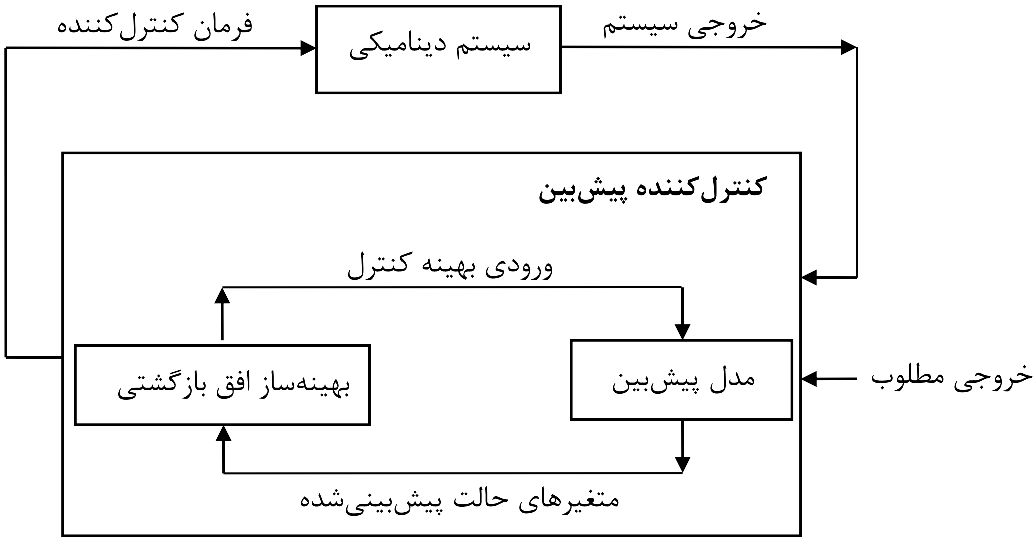
۷ طراحی کنترل‌کننده پیش‌بین

کنترل‌کننده‌های پیش‌بین یکی از انواع کنترل‌کننده‌های مبتنی بر مدل هستند که از اواخر دهـه ۱۹۷۰ ابداع شده‌اند. این کنترل‌کننده‌ها به‌صورت موفق در کاربردهای صنعتی برای سیستم‌های دینامیکی نسبتاً کند استفاده شده‌اند. به‌عنوان نمونه، می‌توان به کاربرد این کنترل‌کننده‌ها در صنایع شیمیایی اشاره کرد [۱۱۰]. با افزایش توان محاسباتی در پردازنـده‌ها، در یـک دهـه اخیـر، امکـان اسـتفاده از کنترل‌کننـده پیش‌بین در بهینه‌سازی برخط سیگنال کنترلـی، بـرای سیسـتم‌هایی بـا دینامیـک سـریع، از جملـه در کاربردهای هوافضایی، مهیا شده‌است. به‌طور مثال، می‌تـوان بـه [۱۱۱]، [۱۱۲] و [۱۱۳] اشـاره کـرد. از مزایای اصلی کنترل‌کننده پیش‌بین می‌توان به توانایی بهینه‌سازی ورودی کنترلی در حالت وجود قید بر روی متغیرهای حالت و ورودی اشاره کرد. همچنین، از آنجا که کنترل‌کننده پیش‌بـین به‌صـورت صـریح قیود عملیاتی را درنظر می‌گیرد؛ لذا، می‌تواند عملکرد بهتری نسبت به ساختار کنترل‌کننده‌های متعـارف داشته باشد.

کنترل پیش‌بین مجموعه‌ای از روش‌های کنترلی است که سیگنال‌های کنترلی سیسـتم در گام‌هـای زمانی بعدی را با استفاده از مدل سیستم و بر مبنای کمینه‌کردن یک تابع هزینه طوری محاسبه می‌کند که خروجی‌های سیستم در گام‌های زمانی آتی به مقادیر مطلوب همگرا شـوند. از ایـن‌رو، ایـن دسـته از کنترل‌کننده‌ها جهت محاسبه خروجی‌های آینده سیستم در یک افق مشخص، که به آن افـق پیش‌بـین گفته می‌شود، از یک مدل پیش‌بین استفاده می‌کنند. مدل پیش‌بین باید نشان‌دهنده دینامیـک سیسـتم باشد، به‌گونه‌ای که بتواند دقیقاً خروجی‌های آینده را پیش‌بینی کند. سپس، مجموعه ورودی‌های کنترلی آینده، در یک افق مشخص که به آن افق کنترلی می‌گویند، با بهینه‌سازی یک تابع هزینه مقید به‌منظور همگرایی سریع‌تر به مسیر مطلوب محاسبه می‌شود.

این معیار معمولاً به‌صورت تابع مربعی از خطای بین سیگنال خروجی پیش‌بینی‌شده و مسیر مرجـع پیش‌بینی‌شده و تلاش کنترلی است. اگـر مسـئله خطـی و بـدون قیـد باشـد، آنگـاه حـل صـریح بـرای سیگنال‌های کنترلی وجود خواهد داشت. اما، در حضـور قیـود، روش‌هـای عـددی بهینه‌سـازی قـادر بـه

محاسبه سیگنال‌های کنترلی در هر لحظه هستند [۱۱۴]. پس از محاسبه ورودی‌های آینده، در هر لحظه اولین مقدار از ورودی‌ها به سیستم اعمال می‌شود. این روند را استراتژی بازگشتی یا افق بازگشتی[1] می‌نامند. البته، ممکن است در مسئله‌ای افق کنترلی یک انتخاب شود؛ در آن‌صورت، همان یک ورودی به سیستم اعمال می‌شود. شماتیک کنترل‌کننده پیش‌بین به‌منظور کمینه‌کردن تابع هزینه مربعی در افق محدود در شکل ۱.۷ نشان داده شده‌است.



شکل ۱.۷ شماتیک کنترل‌کننده پیش‌بین به‌منظور کمینه‌کردن تابع هزینه مربعی در افق محدود.

کنترل‌کننده‌های پیش‌بین را می‌توان به دو دسته کنترل‌کننده‌های پیش‌بین خطی و غیرخطی تقسیم کرد ([۱۱۵] و [۱۱۶]). کنترل‌کننده‌های پیش‌بین خطی بر اساس مدل پیش‌بین خطی سیستم طراحی می‌شوند. از مشهورترین این کنترل‌کننده‌ها می‌توان به MAC[2] [۱۱۷]، DMC[3] [۱۱۸] و کنترل‌کننده پیش‌بین تعمیم‌یافته (GPC)[4] [۱۱۹] اشاره کرد. مدل پیش‌بین در کنترل‌کننده MAC بر مبنای اندازه‌گیری خروجی سیستم در برابر اعمال ورودی ضربه حاصل می‌شود. همچنین، مدل پیش‌بین در کنترل‌کننده DMC بر مبنای اندازه‌گیری خروجی سیستم در برابر اعمال ورودی پله حاصل می‌شود.

[1] Receding Horizon

[2] Model Algorithmic Control

[3] Dynamic Matrix Control

[4] Generalized Predictive Control

سپس در پایان فرآیند طراحی، تغییرات ورودی توسط کنترل‌کننده DMC بدست می‌آید. از این‌رو، یک انتگرال‌گیر باید قبل از اعمال خروجی این کنترل‌کننده به سیستم اعمال شود.

کنترل‌کننده پیش‌بین تعمیم‌یافته (GPC) یکی دیگر از انواع کنترل‌کننده‌های پیش‌بین خطی است که بیانگر تعمیم الگوریتم‌های کنترلی MAC و DMC در فضای توابع تبدیل است. از این‌رو، توانایی محاسبه ورودی و همین‌طور تغییرات آن را دارد. در این روش، مدل پیش‌بین بر مبنای مدل تابع تبدیل سیستم حاصل شده و تاثیر نویزهای سفید و/یا رنگی در تابع تبدیل سیستم درنظر گرفته می‌شود. در رویکرد دوم، کنترل‌کننده پیش‌بین بر اساس مدل غیرخطی پیش‌بین طراحی می‌شود. از مشهورترین کنترل‌کننده‌ها در این زمینه می‌توان به EDMC[1] [۱۲۰]، LDMC[2] [۱۲۱] و MMPC[3] [۱۲۲] اشاره کرد.

همچنین، پژوهش‌هایی با موضوع طراحی کنترل‌کننده مدل پیش‌بین غیرخطی با استفاده از الگوریتم‌های بهینه‌سازی ابتکاری انجام شده‌است. در مرجع [۱۲۳]، کنترل‌کننده پیش‌بین غیرخطی برای سیستم‌های قدرت با استفاده از الگوریتم‌های بهینه‌سازی گروهی مورچه‌ها (ACO)[4] و الگوریتم ژنتیک (GA)[5] طراحی شده‌است. به‌این منظور، ابتدا الگوریتم بهینه‌سازی گروهی مورچه‌ها چندین جواب بهینه برای افق کنترلی محاسبه کرده و سپس الگوریتم ژنتیک اقدام به یافتن بهترین فرمان کنترلی با جستجوی دقیق پیرامون جواب‌های حاصله از الگوریتم بهینه‌سازی گروهی مورچه‌ها می‌کند. همچنین، کنترل‌کننده پیش‌بین غیرخطی مبتنی بر الگوریتم بهینه‌سازی گروهی ذرات (PSO)[6] برای سیستم‌هایی

---

[1] Extended Dynamic Matrix Control

[2] Linear Extended Dynamic Matrix Control

[3] Multiple Model Predictive Control

[4] Ant Colony Optimization

[5] Genetic Algorithm

[6] Particle Swarm Optimization

هم‌چون شبکه گرمایش محلی [۱۲۴]، پاندول معکوس [۱۲۵] و رآکتور مخزنی با همزن (CSTR)[1][۱۲۶]، سرعت چرخش یک موتور [۱۲۷] و چهارپره [۱۲۸] طراحی شده‌است.

در مرجع [۱۲۹]، یک مدل جدید از یک کنترل‌کننده پیش‌بین غیرخطی بر مبنای ترکیبی از دو فیلتر ارائه شده‌است. بر این اساس، متغیرهای حالت سیستم در فیلتر اول تخمین زده شده و خروجی آن در فیلتر دوم، که در آن ورودی کنترل تخمین زده می‌شود، استفاده می‌شود. همچنین، در مراجع [۱۳۰]، [۱۳۱] و [۱۳۲]، یک کنترل‌کننده مدل پیش‌بین غیرخطی مبتنی بر الگوریتم بهینه‌سازی پیوسته توده‌ای مورچه‌ها (CACC)[2] طراحی شده‌است.

از جمله معایب کنترل‌کننده‌های پیش‌بین می‌توان به ضرورت وجود یک مدل پیش‌بین مناسب، که تضمین‌کننده دینامیک سیستم باشد، اشاره کرد. مدل پیش‌بین بخش مرکزی کنترل‌کننده پیش‌بین است و در بسیاری از نمونه‌ها، هنگامی که دینامیک سیستم غیرخطی ناپایدار است، یک مدل پیش‌بین غیردقیق منجر به ناپایداری می‌شود [۱۱۴]. همچنین، تقریب‌های انجام‌شده در مدل‌سازی، تغییرات دینامیک سیستم و عدم‌قطعیت شناخته‌شده می‌تواند باعث کاهش دقت پاسخ مدل پیش‌بین شود. از این‌رو، در بسیاری از کاربردهای کنترل‌کننده پیش‌بین، تلاش‌هایی به‌منظور توسعه یک مدل پیش‌بین قابل اعتماد انجام شده‌است [۱۳۳]. در حقیقت، بدون یک مدل پیش‌بین دقیق، تضمین عملکرد و پایداری خیلی محافظه‌کارانه می‌شود [۱۱۴]. از این‌رو، به‌منظور پیش‌بینی رفتار آینده سیستم به یک مدل دقیق نیاز است. پس در صورت وجود خطا، تغییرات سیستم، عدم‌قطعیت مدل‌سازی و همچنین، اغتشاشات، ابتدا باید متغیرهای حالت سیستم تخمین زده شده و در مدل پیش‌بین استفاده شود.

از این‌رو، هدف از این فصل بررسی دقیق الگوریتم فرود خودکار یک پرنده بال‌ثابت با درنظرگرفتن پدیده باد است. از آنجا که مدل باد تخمین‌زده شده مشخص است؛ فلذا مدل باد آینده قابل پیش‌بینی است. مدل باد پیش‌بینی‌شده و مسیر آینده در معادلات کنترل‌کننده پیش‌بین غیرخطی استفاده می‌شود. از این‌جهت، کنترل‌کننده پیش‌بین غیرخطی نسبت به سایر کنترل‌کننده‌ها در این مسئله استفاده می‌شود. بنابراین، مد نظر است که علاوه بر متغیرهای حالت، نوع مدل باد و پارامترهای آن نیز با استفاده

[1] Continuous Flow Stirred-Tank Reactor

[2] Continuous Ant Colony Controller

از فیلترهای چندمدلی تخمین زده شده و توسط کنترل‌کننده پیش‌بین غیرخطی ابتکاری جبران شود. به‌این منظور، ابتدا مدل دینامیکی سیستم در بخش ۱.۷ بیان می‌شود. سپس، کنترل‌کننده پیش‌بین غیرخطی گروهی ذرات و اثبات پایداری آن به‌ترتیب در بخش‌های ۲.۷ و ۳.۷ معرفی می‌شود. در انتها، در بخش ۴.۷ نتایج شبیه‌سازی ارائه می‌شود.

۱.۷ مدل دینامیکی سیستم

مدل دینامیکی یک سیستم غیرخطی در فضای گسسته به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, k-1) + \boldsymbol{\omega}_{k-1} \tag{۱.۷}$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k \tag{۲.۷}$$

در رابطه فوق، بردارهای $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n\times1}$ و $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{m\times1}$ به‌ترتیب بیانگر متغیرهای حالت و ورودی‌های سیستم هستند. همچنین، k بیانگر زمان نمونه‌برداری، $\boldsymbol{\omega}_{k-1}$ و $\mathbf{v}_k$ به‌ترتیب بیانگر نویزهای فرآیند و اندازه‌گیری با ماتریس‌های کواریانس معلوم $\mathbf{Q}$ و $\mathbf{R}$ هستند.

۲.۷ کنترل‌کننده پیش‌بین غیرخطی گروهی ذرات

در این بخش، یک کنترل‌کننده مدل پیش‌بین غیرخطی مبتنی بر الگوریتم بهینه‌سازی گروهی ذرات (NMPC-PSO)[1] معرفی می‌شود. الگوریتم بهینه‌سازی ابتکاری PSO یک روش بهینه‌سازی ابتکاری مقاوم است که بر مبنای هوش گروهی و نیز استفاده از تجربیات شخصی و دیگر ذرات به یافتن نقطه کمینه اقدام می‌کند. همچنین، در مورد روند اثبات همگرایی این الگوریتم بهینه‌سازی در مراجع نسبت به سایر روش‌های بهینه‌سازی مطالاعات بیشتری انجام شده‌است. فلذا، در این رساله، کنترل‌کننده پیش‌بین غیرخطی مبتنی بر این روش اقدام به یافتن نقطه بهینه یعنی بهترین ورودی کنترلی می‌کند. همچنین، اثبات همگرایی کنترل‌کننده پیش‌بین غیرخطی NMPC-PSO با الگوگیری از اثبات همگرایی الگوریتم بهینه‌سازی PSO انجام شده‌است. فلوچارت الگوریتم کنترل‌کننده مبتنی بر بهینه‌سازی انبوه ذرات در شکل ۲.۷ نشان داده شده‌است. به این‌منظور، ابتدا پارامترهای الگوریتم مقداردهی شده و بردار فرامین کنترلی اولیه به‌صورت تصادفی در فضای جستجو توزیع می‌شود. سپس، در حلقه تکرار داخلی و

[1] Nonlinear Model Predictive Control based on the Particle Swarm Optimization

در هر گام زمانی، خروجی‌های آینده سیستم در افق کنترلی محدود برای هر ذره و بر مبنای توزیع گوسی بردار فرامین کنترل آینده پیش‌بینی می‌شوند.

در این‌صورت، تابع هزینه برای هر ذره بر مبنای هزینه ناشی از خطای ردگیری، تلاش کنترلی و اختلاف فرامین کنترلی در طول افق پیش‌بین کنترل محاسبه می‌شود. در گام بعد، با ثبت بهترین فرامین کنترلی برای هر ذره و نیز بهترین فرامین کنترلی در بین کل ذرات، سرعت و موقعیت فرمان کنترلی هر ذره در طول افق پیش‌بین کنترل به روزرسانی می‌شود. در نهایت، پس از رسیدن به مقدار بیشینه تکرار حلقه داخلی، موقعیت بهترین فرمان کنترلی به‌منظور اعمال به سیستم بر مبنای امید ریاضی موقعیت فرامین کنترلی ذرات منتخب تعیین می‌شود. شبه‌کد کنترل‌کننده پیش‌بین غیرخطی گروهی ذرات در شکل ۳.۷ نشان داده شده است. در ادامه، جزییات مربوط به این الگوریتم توضیح داده می‌شود.

۱.۲.۷ مقداردهی اولیه

الگوریتم کنترل‌کننده پیش‌بین غیرخطی گروهی ذرات دارای چند پارامتر کنترلی است که باید قبل از اجرای الگوریتم مقداردهی شوند. پارامترهای این کنترل‌کننده عبارتند از: طول افق پیش‌بینی (T_P)، تعداد ذرات (N) و تعداد ذرات منتخب (N_t).

در این الگوریتم، موقعیت ابتدایی متغیر فرمان کنترلی ذره j-ام ($\mathbf{u}_0^j$) به‌ازای $j=1,\ldots,N$ به‌صورت تصادفی با توزیع یکنواخت در محدوده قابل قبول فرامین کنترلی تولید می‌شود. سپس، مقداری برای سرعت اولیه هر ذره ($\mathbf{v}_0^j$) اختصاص داده می‌شود. به‌منظور جلوگیری از افزایش بیش از حد سرعت حرکت یک ذره در حرکت از یک محل به محل دیگر، سرعت در محدوده v_{min} تا v_{max} انتخاب می‌شود.

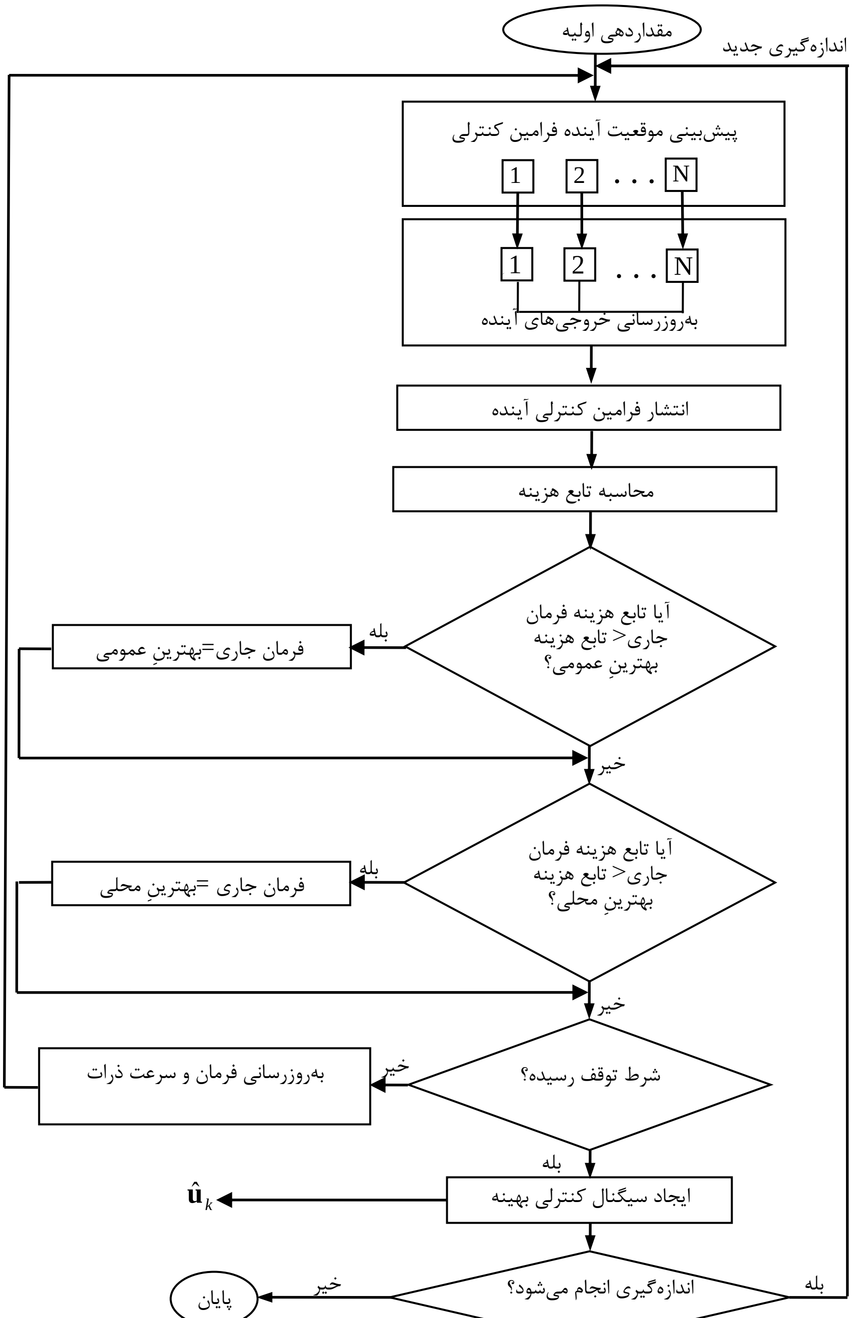
۲.۲.۷ پیش‌بینی خروجی‌های آینده سیستم

در شروع k-امین گام زمانی، خروجی‌های آینده ذره j-ام ($\mathbf{z}_{k+k_p}^j$) به‌ازای افق کنترلی $k_p=1,\ldots,T_p$ و در حلقه تکرار i-ام به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\mathbf{x}_{k+k_p}^{j,i} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1+k_p}^{j,i}, \mathbf{u}_{k-1+k_p}^{j,i}, k-1+k_p) \quad (۳.۷)$$

$$\mathbf{z}_{k+k_p}^{j,i} = \mathbf{h}(\mathbf{x}_{k+k_p}^{j,i}) \quad (۴.۷)$$

لازم به ذکر است که در هر گام زمانی، متغیر حالت سیستم ($\mathbf{x}_{k-1}^{j,i}$) از نتیجه الگوریتم تخمین‌گر متغیرهای حالت حاصل می‌شود.



شکل ۲.۷ فلوچارت الگوریتم پیش‌بین غیرخطی گروهی ذرات.

Set number of agents, N, and number of top agents, N_t.
Set prediction horizon, T_P.
Initialize randomly position of the agents, $\mathbf{u}_0^j$, for $j \in [1,N]$.
Initialize randomly velocity of the agents, $\mathbf{v}_0^j$, for $j \in [1,N]$ & $\mathbf{v}_0^j \in [\mathbf{v}_{\min} \quad \mathbf{v}_{\max}]$.
While (Measurements, $\mathbf{z}_k$, & states, $\hat{\mathbf{x}}_k$, are available)
  For i=1 to $i_{\max}$
    For j=1 to N
      $\mathbf{x}_k^{j,i} = \hat{\mathbf{x}}_k$
      For k_p=1 to T_P
        Predict the future states, $\mathbf{x}_{k+k_p}^{j,i}$.
        Predict the future outputs, $\mathbf{z}_{k+k_p}^{j,i}$.
        Propagate the future commands, $\mathbf{u}_{k+k_p}^{j,i}$.
      Next prediction step k_p
      Compute the cost function related to the tracking error, $c_{\text{te}}^{j,i}$.
      Compute the cost function related to the control effort, $c_{\text{ce}}^{j,i}$.
      Compute the cost function related to the control smoothness, $c_{\text{cs}}^{j,i}$.
      Compute the total cost function, $c_k^{j,i} = c_{\text{te}}^{j,i} + c_{\text{ce}}^{j,i} + c_{\text{cs}}^{j,i}$.
      Update local best agent.
    Next agent j
    Find minimum cost function and optimum agent.
    Update global best agent.
    For j=1 to N
      For k_p=1 to T_P
        Update future velocity of agent j, $\mathbf{v}_{k+k_p}^{j,i+1}$.
        Update future position of agent j, $\mathbf{u}_{k+k_p}^{j,i+1}$.
      Next prediction step k_p
    Next agent j
  Next iteration i
  Sort agents according to the cost.
  Compute mean position of N_t top agents.
  Estimate the controller commands, $\hat{\mathbf{u}}_k$.
Next time step k

شکل ۳.۷ شبه‌کد کنترل‌کننده پیش‌بین غیرخطی گروهی ذرات.

۳.۲.۷ انتشار فرامین کنترلی آینده

در شروع k-امین گام زمانی، بردار فرامین کنترلی آینده ذره j-ام سیستم ($\mathbf{u}_{k+k_p}^{j,i}$) در طول افق کنترلی $k_p=1,\ldots,T_p$ و در حلقه تکرار i-ام به‌صورت زیر منتشر می‌شود:

$$\mathbf{u}_{k+k_p}^{j,i} = \mathbf{u}_{k-1+k_p}^{j,i} + \boldsymbol{\gamma}_{k-1+k_p}^{j,i} \qquad (۵.۷)$$

در رابطه فوق، $\boldsymbol{\gamma}_{k-1+k_p}^{j,i}$ بیانگر بردار متغیر تصادفی است که به‌صورت توزیع گوسی با میانگین صفر و بردار انحراف معیار $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{u}}$ مدل می‌شود.

۴.۲.۷ ارزیابی تابع هزینه

تابع هزینه ذره j-ام در k-امین گام زمانی و در حلقه تکرار i-ام به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$c_k^{j,i} = c_{\mathrm{te}}^{j,i} + c_{\mathrm{ce}}^{j,i} + c_{\mathrm{cs}}^{j,i} \qquad (۶.۷)$$

در رابطه فوق $c_{\mathrm{te}}^{j,i}$ [1] مقدار هزینه ناشی از خطای ردگیری خروجی‌های پیش‌بینی شده ذره j-ام با مقدار مطلوب خروجی ($\mathbf{z}_{\mathrm{sp}}$) است که به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$c_{\mathrm{te}}^{j,i} = \frac{\sum_{k_p=1}^{\mathrm{T_P}} \left[\mathbf{z}_{k+k_p}^{j,i} - \mathbf{z}_{\mathrm{sp}_{k+k_p}}\right]^{\mathrm{T}} \mathbf{W}_{\mathrm{te}} \left[\mathbf{z}_{k+k_p}^{j,i} - \mathbf{z}_{\mathrm{sp}_{k+k_p}}\right]}{\max\limits_{j=1}^{\mathrm{N}} \sum_{k_p=1}^{\mathrm{T_P}} \left[\mathbf{z}_{k+k_p}^{j,i} - \mathbf{z}_{\mathrm{sp}_{k+k_p}}\right]^{\mathrm{T}} \mathbf{W}_{\mathrm{te}} \left[\mathbf{z}_{k+k_p}^{j,i} - \mathbf{z}_{\mathrm{sp}_{k+k_p}}\right]} \qquad (۷.۷)$$

همچنین، $c_{\mathrm{ce}}^{j,i}$ [2] مقدار هزینه ناشی از تلاش کنترلی در طول افق کنترلی است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$c_{\mathrm{ce}}^{j,i} = \frac{\sum_{k_p=1}^{\mathrm{T_P}} \left[\mathbf{u}_{k+k_p}^{j,i}\right]^{\mathrm{T}} \mathbf{W}_{\mathrm{ce}} \left[\mathbf{u}_{k+k_p}^{j,i}\right]}{\max\limits_{j=1}^{\mathrm{N}} \sum_{k_p=1}^{\mathrm{T_P}} \left[\mathbf{u}_{k+k_p}^{j,i}\right]^{\mathrm{T}} \mathbf{W}_{\mathrm{ce}} \left[\mathbf{u}_{k+k_p}^{j,i}\right]} \qquad (۸.۷)$$

$c_{\mathrm{cs}}^{j,i}$ [3] هزینه ناشی از اختلاف فرامین کنترلی در یک گام زمانی افق پیش‌بین با گام زمانی بعدی است که به‌منظور جلوگیری از پدیده چترینگ فرمان کنترلی لحاظ شده و به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

---

[1] Tracking Error

[2] Control Smoothness

[3] Control Effort

$$c_{\text{cs}}^{j,i}=\frac{\sum_{k_p=1}^{\text{T}_\text{P}}\left[\mathbf{u}_{k+k_p}^{j,i}-\mathbf{u}_{k-1+k_p}^{j,i}\right]^\text{T}\mathbf{W}_{\text{cs}}\left[\mathbf{u}_{k+k_p}^{j,i}-\mathbf{u}_{k-1+k_p}^{j,i}\right]}{\max_{j=1}^{\text{N}}\sum_{k_p=1}^{\text{T}_\text{P}}\left[\mathbf{u}_{k+k_p}^{j,i}-\mathbf{u}_{k-1+k_p}^{j,i}\right]^\text{T}\mathbf{W}_{\text{cs}}\left[\mathbf{u}_{k+k_p+1}^{j,i}-\mathbf{u}_{k-1+k_p}^{j,i}\right]} \tag{۹.۷}$$

در روابط فوق، ماتریس‌های $\mathbf{W}_{\text{te}}$، $\mathbf{W}_{\text{ce}}$ و $\mathbf{W}_{\text{cs}}$ به‌ترتیب بیانگر وزن هر یک از خطاهای c_{te}، c_{ce} و c_{cs} در توابع هزینه هستند.

۵.۲.۷ به‌روزرسانی بهترین تجربه عمومی و محلی فرامین کنترلی

در این مرحله، ابتدا در k_p-امین افق پیش‌بین کنترلی و نیز در حلقه تکرار i-ام، بهترین فرامین کنترلی برای ذره j-ام ($\mathbf{p}_{k+k_p}^{j,i}$) به‌ازای $k_\text{p}=1,\ldots,\text{T}_\text{P}$ ثبت می‌شود. سپس، در k_p-امین افق پیش‌بین کنترلی و نیز در حلقه تکرار i-ام بهترین فرامین کنترلی در بین کل ذرات ($\mathbf{g}_{k+k_p}^{i}$) به‌ازای $k_\text{p}=1,\ldots,\text{T}_\text{P}$ ثبت می‌شود. در اولین تکرار ($i=1$)، موقعیت فعلی فرمان کنترلی هر ذره به‌عنوان بهترین فرامین کنترلی برای هر ذره به‌صورت زیر درنظر گرفته می‌شود:

$$\mathbf{p}_{k+k_p}^{j,1}=\mathbf{u}_{k+k_p}^{j,1} \tag{۱۰.۷}$$

در تکرارهای بعدی، هزینه هر ذره در k_p-امین گام افق پیش‌بین کنترلی با بهترین هزینه ذره j-ام مقایسه می‌شود. در صورتیکه، این هزینه از بهترین هزینه ثبت‌شده برای این ذره کمتر باشد؛ آنگاه موقعیت و هزینه این ذره جایگزین مقدار قبلی می‌شود. در غیر این‌صورت، تغییری در موقعیت و هزینه ثبت‌شده برای این ذره ایجاد نمی‌شود.

۶.۲.۷ به‌روزرسانی سرعت تغییرات فرامین کنترلی آینده

پس از ثبت بهترین فرامین کنترلی برای هر ذره و کل ذرات، سرعت ذره j-ام، به‌ازای $k_\text{p}=1,\ldots,\text{T}_\text{P}$، در گام زمانی k-ام و در حلقه تکرار i-ام ($\mathbf{v}_{k+k_p}^{j,i}$) به‌صورت زیر به‌روزرسانی می‌شود:

$$\mathbf{v}_{k+k_p}^{j,i+1}=\text{w}\,\mathbf{v}_{k+k_p}^{j,i}+\text{c}_1 r_1(\mathbf{p}_{k+k_p}^{j,i}-\mathbf{u}_{k+k_p}^{j,i})+\text{c}_2 r_2(\mathbf{g}_{k+k_p}^{i}-\mathbf{u}_{k+k_p}^{j,i}) \tag{۱۱.۷}$$

در رابطه فوق، w بیانگر ماتریس ثابت اصطکاک و c_1 و c_2 ضرایب ثابت مثبت هستند. همچنین، r_1 و r_2 دو عدد تصادفی با توزیع یکنواخت در بازه $[0,1]$ هستند.

۷.۲.۷ به‌روزرسانی موقعیت فرامین کنترلی آینده

در گام زمانی k-ام و نیز در حلقه تکرار i-ام، موقعیت فرامین کنترلی ذره j-ام ($\mathbf{u}_{k+k_p}^{j,i}$) به ازای $k_p=1,\ldots,T_p$ به‌صورت زیر به‌روزرسانی می‌شود:

$$\mathbf{u}_{k+k_p}^{j,i+1} = \mathbf{u}_{k+k_p}^{j,i} + \mathbf{v}_{k+k_p}^{j,i+1} \qquad (۱۲.۷)$$

۸.۲.۷ شرط توقف

الگوریتم با رسیدن به مقدار بیشینه تکرار (i_{max}) متوقف می‌شود.

۹.۲.۷ تخمین فرامین کنترل

پس از رسیدن به مقدار بیشینه تکرار حلقه داخلی (i_{max})، بهترین موقعیت فرمان کنترلی در گام زمانی k-ام بر مبنای امید ریاضی موقعیت فرامین کنترلی ذرات منتخب به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\hat{\mathbf{u}}_k = \frac{1}{N_t}\sum_{j=1}^{N_t}\mathbf{u}_k^{j,i_{max}} \qquad (۱۳.۷)$$

۳.۷ تحلیل همگرایی کنترل‌کننده پیش‌بین غیرخطی گروهی ذرات

همانطور که در بخش ۲.۷ بیان شد، الگوریتم کنترل‌کننده پیش‌بین غیرخطی گروهی ذرات، در هر تکرار، از سه بخش پیش‌بینی آینده سیستم، محاسبه توابع هزینه و نیز همگرایی ذرات به‌سمت بهترین فرمان کنترلی مطابق با شکل ۴.۷ تشکیل شده است. در این بخش، ابتدا پایداری رفتار پیش‌بینی‌شده از آینده سیستم در هر حلقه تکرار بررسی می‌شود. سپس، به تحلیل همگرایی ذرات به‌سمت بهترین ذره (بهترین فرامین کنترلی) پرداخته می‌شود.

Set number of agents, N, and number of top agents, N_t.
Set prediction horizon, T_P.
Initialize randomly position of the agents, $\mathbf{u}_0^j$, for $j \in [1,N]$.
Initialize randomly velocity of the agents, $\mathbf{v}_0^j$, for $j \in [1,N]$ & $\mathbf{v}_0^j \in [\mathbf{v}_{\min} \quad \mathbf{v}_{\max}]$.
While (Measurements, $\mathbf{z}_k$, & states, $\hat{\mathbf{x}}_k$, are available)
    For i=1 to $i_{\max}$
        For j=1 to N
            $\mathbf{x}_k^{j,i} = \hat{\mathbf{x}}_k$
            For k_p=1 to T_P
                Predict the future states, $\mathbf{x}_{k+k_p}^{j,i}$.
                Predict the future outputs, $\mathbf{z}_{k+k_p}^{j,i}$.
                Propagate the future commands, $\mathbf{u}_{k+k_p}^{j,i}$.
            Next prediction step k_p
            Compute the cost function related to the tracking error, $c_{te}^{j,i}$.
            Compute the cost function related to the control effort, $c_{ce}^{j,i}$.
            Compute the cost function related to the control smoothness, $c_{cs}^{j,i}$.
            Compute the total cost function, $c_k^{j,i} = c_{te}^{j,i} + c_{ce}^{j,i} + c_{cs}^{j,i}$.
            Update local best agent.
        Next agent j
        Find minimum cost function and optimum agent.
        Update global best agent.
        For j=1 to N
            For k_p=1 to T_P
                Update future velocity of agent j, $\mathbf{v}_{k+k_p}^{j,i+1}$.
                Update future position of agent j, $\mathbf{u}_{k+k_p}^{j,i+1}$.
            Next prediction step k_p
        Next agent j
    Next iteration i
    Sort agents according to the cost.
    Compute mean position of N_t top agents.
    Estimate the controller commands, $\hat{\mathbf{u}}_k$.
Next time step k

پیش‌بینی آینده سیستم

محاسبه توابع هزینه

همگرایی ذرات به‌سمت بهترین فرمان کنترلی

شکل ۴.۷ اجزا کنترل‌کننده پیش‌بین غیرخطی گروهی ذرات.

۱.۳.۷ پایداری رفتار پیش‌بینی‌شده از آینده سیستم

معادلات پیش‌بینی خروجی‌های آینده سیستم براساس مطالب بیان‌شده در بخش ۲.۲.۷ به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\mathbf{x}_{k+k_p}^{j,i} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1+k_p}^{j,i}, \mathbf{u}_{k-1+k_p}^{j,i}, k-1+k_p) \tag{۱۴.۷}$$

$$\mathbf{z}_{k+k_p}^{j,i} = \mathbf{h}(\mathbf{x}_{k+k_p}^{j,i}) \tag{۱۵.۷}$$

معادلات غیرخطی فوق را می‌توان حول حالت جاری ($\mathbf{x}_k$ و $\mathbf{u}_k$) به‌صورت زیر تقریب زد:

$$\mathbf{x}_{k+k_p}^{j,i} = \mathbf{A}\,\mathbf{x}_{k-1+k_p}^{j,i} + \mathbf{B}\,\mathbf{u}_{k-1+k_p}^{j,i} + \text{h.o.t} \tag{۱۶.۷}$$

$$\mathbf{z}_{k+k_p}^{j,i} = \mathbf{C}\,\mathbf{x}_{k+k_p}^{j,i} + \text{h.o.t} \tag{۱۷.۷}$$

جاییکه h.o.t بیانگر ترم‌های مرتبه بالای غیرخطی هستند. با جایگذاری معادله فوق در رابطه (۱۶.۷) و صرف‌نظر از ترم‌های غیرخطی، مدل پیش‌بین خروجی سیستم به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\mathbf{z}_{k+k_p}^{j,i} = \mathbf{C}\ \mathbf{x}_{k+k_p}^{j,i} = \mathbf{C}\,\mathbf{A}\,\mathbf{x}_{k-1+k_p}^{j,i} + \mathbf{C}\,\mathbf{B}\mathbf{u}_{k-1+k_p}^{j,i} \tag{۱۸.۷}$$

به‌طور مشابه، دینامیک مدل پیش‌بین خروجی در گام زمانی پیشِ‌رو به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\mathbf{z}_{k+1+k_p}^{j,i} = \mathbf{C}\ \mathbf{x}_{k+1+k_p}^{j,i} = \mathbf{C}\,\mathbf{A}\,\mathbf{x}_{k+k_p}^{j,i} + \mathbf{C}\,\mathbf{B}\mathbf{u}_{k+k_p}^{j,i} \tag{۱۹.۷}$$

دینامیک تغییرات خروجی برمبنای اختلاف روابط (۱۸.۷) و (۱۹.۷) و نیز با فرض پس‌خور کامل متغیرهای حالت[1] ($\mathbf{C} = \mathbf{I}$) به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{z}_{k+1+k_p}^{j,i} &= \mathbf{z}_{k+1+k_p}^{j,i} - \mathbf{z}_{k+k_p}^{j,i} = \mathbf{x}_{k+1+k_p}^{j,i} - \mathbf{x}_{k+k_p}^{j,i} \\ &= \mathbf{A}\left(\mathbf{x}_{k+k_p}^{j,i} - \mathbf{x}_{k-1+k_p}^{j,i}\right) + \mathbf{B}\left(\mathbf{u}_{k+k_p}^{j,i} - \mathbf{u}_{k-1+k_p}^{j,i}\right) \\ &= \mathbf{A}\,\Delta\mathbf{z}_{k+k_p}^{j,i} + \mathbf{B}\left(\mathbf{u}_{k+k_p}^{j,i} - \mathbf{u}_{k-1+k_p}^{j,i}\right)\end{aligned} \tag{۲۰.۷}$$

معادله فوق برمبنای مدل انتشار فرامین کنترلی آینده (رابطه (۵.۷)) در طول افق پیش‌بین به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\Delta\mathbf{z}_{k+1+k_p}^{j,i} = \mathbf{A}\,\Delta\mathbf{z}_{k+k_p}^{j,i} + \mathbf{B}\,\boldsymbol{\gamma}_{k-1+k_p}^{j,i} \tag{۲۱.۷}$$

[1] Full State Feedback

امید ریاضی رابطه فوق به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\mathbf{E}\left(\Delta\mathbf{z}^{j,i}_{k+1+k_p}\right)=\mathbf{AE}\left(\Delta\mathbf{z}^{j,i}_{k+k_p}\right)+\mathbf{B}\,\mathbf{E}\left(\boldsymbol{\gamma}^{j,i}_{k-1+k_p}\right) \tag{۲۲.۷}$$

از آنجا که $\boldsymbol{\gamma}^{j,i}_{k-1+k_p}$ برداری با میانگین صفر و کواریانس $\mathbf{M}=\mathbf{E}\left({\boldsymbol{\gamma}^{j,i}_{k-1+k_p}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\gamma}^{j,i}_{k-1+k_p}\right)=\mathrm{diag}\left(\boldsymbol{\sigma}^2_{\mathbf{u}_1},\ldots,\boldsymbol{\sigma}^2_{\mathbf{u}_m}\right)$ است، امید ریاضی رابطه فوق به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$\mathbf{E}\left(\Delta\mathbf{z}^{j,i}_{k+1+k_p}\right)=\mathbf{AE}\left(\Delta\mathbf{z}^{j,i}_{k+k_p}\right) \tag{۲۳.۷}$$

همچنین، با تعریف $\mathbf{E}\left(\Delta\mathbf{z}^{j,i}_{k+k_p}\right)=\Delta\overline{\mathbf{z}}^{j,i}_{k+k_p}=\overline{\mathbf{z}}^{j,i}_{k+k_p}-\overline{\mathbf{z}}^{j,i}_{k+k_p-1}$ و کواریانس دینامیک تغییرات خروجی به‌صورت $\Delta\mathbf{P}^{j,i}_{k+k_p}=\mathbf{E}\left((\Delta\mathbf{z}^{j,i}_{k+k_p}-\Delta\overline{\mathbf{z}}^{j,i}_{k+k_p})^{\mathrm{T}}\,(\Delta\mathbf{z}^{j,i}_{k+k_p}-\Delta\overline{\mathbf{z}}^{j,i}_{k+k_p})\right)$، کواریانس رابطه (۲۱.۷) به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\Delta\mathbf{P}^{j,i}_{k+1+k_p}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\Delta\mathbf{P}^{j,i}_{k+k_p}\mathbf{A}+\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{B} \tag{۲۴.۷}$$

ماتریس کواریانس در اولین افق پیش‌بین ($k_p=1$) در حلقه تکرار i به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\Delta\mathbf{P}^{j,i}_{k+2}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\Delta\mathbf{P}^{j,i}_{k+1}\mathbf{A}+\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{B} \tag{۲۵.۷}$$

ماتریس کواریانس در دومین افق پیش‌بین ($k_p=2$) در حلقه تکرار i به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{P}^{j,i}_{k+3}&=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\Delta\mathbf{P}^{j,i}_{k+2}\mathbf{A}+\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{B}\\&=(\mathbf{A}^2)^{\mathrm{T}}\Delta\mathbf{P}^{j,i}_{k+1}(\mathbf{A}^2)+(\mathbf{A}^2+\mathbf{A}+\mathbf{I})^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{B}\,(\mathbf{A}^2+\mathbf{A}+\mathbf{I})\end{aligned} \tag{۲۶.۷}$$

با ادامه این روند و با درنظرگرفتن $\Delta\mathbf{P}^{j,i}_{k+1}$ به‌عنوان تغییرات ماتریس کواریانس اولیه، ماتریس کواریانس در انتهای افق پیش‌بین ($k_p=\mathrm{T_p}$) در حلقه تکرار i به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\Delta\mathbf{P}^{j,i}_{k+1+\mathrm{T_p}}=(\mathbf{A}^{\mathrm{T_p}})^{\mathrm{T}}\Delta\mathbf{P}^{j,i}_{k+1}(\mathbf{A}^{\mathrm{T_p}})+(\mathbf{A}^{\mathrm{T_p}}+\mathbf{A}^{\mathrm{T_p}-1}+\ldots+\mathbf{A}+\mathbf{I})^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{B}(\mathbf{A}^{\mathrm{T_p}}+\mathbf{A}^{\mathrm{T_p}-1}+\ldots+\mathbf{A}+\mathbf{I}) \tag{۲۷.۷}$$

بر طبق رابطه (۲۳.۷)، در صورتیکه مقادیر ویژه ماتریس $\mathbf{A}$ درون دایره واحد باشد ($\left|eig\left(\mathbf{A}\right)\right|<1$)؛ آنگاه امید ریاضی تغییرات خروجی ($\mathbf{E}\left(\Delta\mathbf{z}^{j,i}_{k+1+k_p}\right)$) مدل پیش‌بین خطی به‌ازای افق پیش‌بینِ نامحدود پایدار مجانبی است. لذا، تغییرات خروجی مدل پیش‌بین به‌ازای افق پیش‌بینِ نامحدود به صفر میل می‌کند. در

نتیجه:

$$\lim_{k_p\to\infty}\mathbf{E}(\Delta\mathbf{z}^{j,i}_{k+1+k_p})=\lim_{k_p\to\infty}\mathbf{E}(\mathbf{z}^{j,i}_{k+1+k_p}-\mathbf{z}^{j,i}_{k+k_p})=0\rightarrow\lim_{k_p\to\infty}\mathbf{E}(\mathbf{z}^{j,i}_{k+1+k_p})=\lim_{k_p\to\infty}\mathbf{E}(\mathbf{z}^{j,i}_{k+k_p}) \quad (۲۸.۷)$$

بنابراین، به‌ازای افق پیش‌بینِ نامحدود امید ریاضی خروجی پایدار و به مقدار ثابت میل خواهد کرد. به‌علاوه، تغییرات ماتریس کواریانس ($\Delta\mathbf{P}^{j,i}_{k+1+\mathrm{T_p}}$) بر طبق رابطه (۲۴.۷) از دو عبارت تشکیل شده است. بر مبنای قضیه کیلی-همیلتون [۱۷۲] مبنی بر صدق کردن هر ماتریس مربعی در معادله مشخصه خود، هر دو عبارت تغییرات ماتریس کواریانس کراندار است. بنابراین، تغییرات ماتریس کواریانس در چنین شرایطی در طول افق پیش‌بینِ نامحدود کراندار است؛ در نتیجه، ماتریس کواریانس $\mathbf{P}^{j,i}_{k+1+\mathrm{T_p}}$ به‌ازای افق پیش‌بینِ نامحدود کراندار است. بنابراین، هنگامیکه مقادیر ویژه ماتریس $\mathbf{A}$ درون دایره واحد باشد؛ آنگاه رفتار پیش‌بینی‌شده سیستم دینامیکی پایدار است.

در مقابل، در صورتیکه مقادیر ویژه ماتریس $\mathbf{A}$ خارج از دایره واحد باشد ($\left|eig\left(\mathbf{A}\right)\right|>1$)؛ آنگاه امید ریاضی تغییرات خروجی مدل پیش‌بین به‌ازای افق پیش‌بین نامحدود ناپایدار است. همچنین، ماتریس کواریانس در طول افق پیش‌بینِ نامحدود، کراندار و صعودی است. بنابراین، هنگامیکه مقادیر ویژه ماتریس $\mathbf{A}$ خارج از دایره واحد باشد؛ آنگاه افق پیش‌بین باید محدود انتخاب شود تا رفتار پیش‌بینی‌شده سیستم دینامیکی پایدار باقی بماند.

۲.۳.۷ همگرایی ذرات به‌سمت بهترین ذره

به‌منظور اثبات همگرایی ذرات به‌سمت بهترین ذره، معادلات حرکت ذرات در الگوریتم کنترل‌کننده پیش‌بین غیرخطی گروهی ذرات به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\mathbf{v}^{j,i+1}_{k+k_p}=\mathbf{W}\mathbf{v}^{j,i}_{k+k_p}+\mathbf{C}_1(\mathbf{p}^{j,i}_{k+k_p}-\mathbf{u}^{j,i}_{k+k_p})+\mathbf{C}_2(\mathbf{g}^{i}_{k+k_p}-\mathbf{u}^{j,i}_{k+k_p}) \quad (۲۹.۷)$$

$$\mathbf{u}^{j,i+1}_{k+k_p}=\mathbf{u}^{j,i}_{k+k_p}+\mathbf{v}^{j,i+1}_{k+k_p} \quad (۳۰.۷)$$

در رابطه فوق، $\mathbf{W}=\mathrm{w}\,\mathbf{I}_{\mathrm{m\times m}}$ ، $\mathbf{C}_1=\mathrm{c}_1 r_1\mathbf{I}_{\mathrm{m\times m}}$ و $\mathbf{C}_2=\mathrm{c}_2 r_2\mathbf{I}_{\mathrm{m\times m}}$ هستند. با جایگزینی معادلـه (۲۹.۷) در معادله (۳۰.۷)، رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\mathbf{u}_{k+k_p}^{j,i+1} = \mathbf{u}_{k+k_p}^{j,i} + \mathbf{W}\mathbf{v}_{k+k_p}^{j,i} + \mathbf{C}_1(\mathbf{p}_{k+k_p}^{j,i} - \mathbf{u}_{k+k_p}^{j,i}) + \mathbf{C}_2(\mathbf{g}_{k+k_p}^{i} - \mathbf{u}_{k+k_p}^{j,i}) \qquad (۳۱.۷)$$

در این صورت، براساس معادلات (۳۱.۷) و (۲۹.۷) مدل دینامیک ذرات به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_{k+k_p}^{j,i+1} \\ \mathbf{v}_{k+k_p}^{j,i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\mathrm{m\times m}} - \mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2 & \mathbf{W} \\ -\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2 & \mathbf{W} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{k+k_p}^{j,i} \\ \mathbf{v}_{k+k_p}^{j,i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{k+k_p}^{j,i} \\ \mathbf{g}_{k+k_p}^{i} \end{bmatrix} \qquad (۳۲.۷)$$

به‌منظور بررسی همگرایی ذرات در کنترل‌کننده پیش‌بین غیرخطی گروهی ذرات، برای بهترین ذره خواهیم داشت: $\mathbf{p}_{k+k_p}^{j,i} = \mathbf{g}_{k+k_p}^{i}$. در نتیجه، معادله فوق برای بهترین ذره از بین تمام ذرات به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_{k+k_p}^{i+1} \\ \mathbf{v}_{k+k_p}^{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2 & \mathbf{W} \\ -\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2 & \mathbf{W} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{k+k_p}^{i} \\ \mathbf{v}_{k+k_p}^{i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \mathbf{g}_{k+k_p}^{i} \qquad (۳۳.۷)$$

با تعریف بردار متغیرهای حالت به‌صورت $\mathbf{x}_{k+k_p}^{i} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^i & \mathbf{x}_2^i \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{k+k_p}^{i} & \mathbf{v}_{k+k_p}^{i} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$، مدل فضای حالت دینامیک بهترین ذره در کنترل‌کننده پیش‌بین غیرخطی گروهی ذرات به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\mathbf{x}_{k+k_p}^{i+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2 & \mathbf{W} \\ -\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2 & \mathbf{W} \end{bmatrix} \mathbf{x}_{k+k_p}^{i} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \mathbf{g}_{k+k_p}^{i} \qquad (۳۴.۷)$$

در گام بعد، نقاط تعادل معادله دینامیکی فوق باید محاسبه شود. بر مبنای مرجع [۱۳۴]، نقاط تعادل یک سیستم گسسته زمان به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\lim_{i \to i_{\max}} \mathbf{x}_{k+k_p}^{i+1} = \mathbf{x}_{k+k_p}^{i} \qquad (۳۵.۷)$$

بنابراین، بر طبق معادلات (۳۴.۷) و (۳۵.۷)، دینامیک بهترین ذره دارای نقطه تعادل در $\mathbf{x}_1^* = \mathbf{g}_{k+k_p}^{i}$ و $\mathbf{x}_2^* = \mathbf{v}_{k+k_p}^{i} = \mathbf{0}$ است [۱۳۵]. لذا، تعریف زیر برقرار است:

تعریف ۲۶: حالت تعادل بهترین ذره در کنترل‌کننده پیش‌بین غیرخطی گروهی ذرات در $\mathbf{x}_1^* = \mathbf{g}_{k+k_p}^{i}$ و $\mathbf{x}_2^* = \mathbf{v}_{k+k_p}^{i} = \mathbf{0}$ قرار دارد.

بر اساس تعریف فوق، معادلات دینامیک خطای ذرات نسبت به حالت تعادل بهترین ذره، به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{i}_{k+k_p}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}^{i}_{1}\\ \boldsymbol{\varepsilon}^{i}_{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{x}^{i}_{1}-\mathbf{x}^{*}_{1}\\ \mathbf{x}^{i}_{2}-\mathbf{x}^{*}_{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{u}^{i}_{k+k_p}-\mathbf{g}^{i}_{k+k_p}\\ \mathbf{v}^{i}_{k+k_p}\end{bmatrix} \tag{۳۶.۷}$$

با جایگذاری معادله (۳۳.۷) در عبارت فوق، معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{i+1}_{k+k_p}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}^{i+1}_{1}\\ \boldsymbol{\varepsilon}^{i+1}_{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\mathbf{I}-\mathbf{C}_1-\mathbf{C}_2)(\mathbf{u}^{i}_{k+k_p}-\mathbf{g}^{i}_{k+k_p})+\mathbf{W}\mathbf{v}^{i}_{k+k_p-1}\\ (-\mathbf{C}_1-\mathbf{C}_2)(\mathbf{u}^{i}_{k+k_p}-\mathbf{g}^{i}_{k+k_p})+\mathbf{W}\mathbf{v}^{i}_{k+k_p-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\mathbf{I}-\mathbf{C}_1-\mathbf{C}_2)\boldsymbol{\varepsilon}^{i}_{1}+\mathbf{W}\boldsymbol{\varepsilon}^{i}_{2}\\ (-\mathbf{C}_1-\mathbf{C}_2)\boldsymbol{\varepsilon}^{i}_{1}+\mathbf{W}\boldsymbol{\varepsilon}^{i}_{2}\end{bmatrix} \tag{۳۷.۷}$$

بنابراین، معادله دینامیک خطا در هر بعد، با تعریف $\alpha=\mathrm{c}_1 r_1+\mathrm{c}_2 r_2$ به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{i+1}_{k+k_p}=\begin{bmatrix}(1-\alpha) & \mathrm{w}\\ -\alpha & \mathrm{w}\end{bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}^{i}_{k+k_p} \tag{۳۸.۷}$$

در نتیجه، معادله مشخصه عبارت فوق برای هر بعد به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}|=0\rightarrow\begin{vmatrix}\lambda-1+\alpha & -\mathrm{w}\\ \alpha & \lambda-\mathrm{w}\end{vmatrix}=0\rightarrow\lambda^2+(\alpha-1-\mathrm{w})\lambda+\mathrm{w}=0 \tag{۳۹.۷}$$

بر مبنای مرجع [۱۳۶]، در صورتیکه ریشه‌های معادله مشخصه فوق درون دایره واحد باشند ($|\lambda_1|<1$ و $|\lambda_2|<1$)؛ آنگاه معادله دینامیک خطای ذرات در هر بعد پایدار مجانبی است. این شرایط می‌تواند به‌صورت $|\lambda_1+\lambda_2|<2$ و $|\lambda_1\lambda_2|<1$ بیان شود. در نتیجه، معادله دینامیک خطا (رابطه (۳۸.۷)) پایدار مجانبی است؛ اگر

$$|\lambda_1+\lambda_2|<2\rightarrow-2<(\alpha-1-\mathrm{w})<2\rightarrow-1<\alpha-\mathrm{w}<3 \tag{۴۰.۷}$$

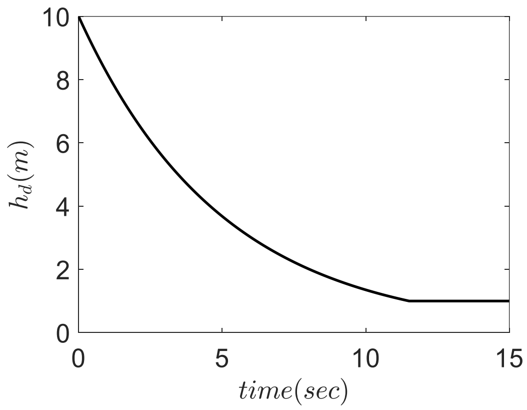
$$|\lambda_1\lambda_2|<1\rightarrow|\mathrm{w}|<1\rightarrow-1<\mathrm{w}<1 \tag{۴۱.۷}$$

بنابراین، در صورتیکه شرایط فوق تضمین شود؛ آنگاه ذرات در هر گام زمانی به سمت نقطه تعادل بهترین ذره ($\mathbf{x}^{*}_{1}=\mathbf{g}^{i}_{k+k_p}$ و $\mathbf{x}^{*}_{2}=\mathbf{v}^{i}_{k+k_p}=\mathbf{0}$)، یعنی نقاطی که تابع هزینه را به‌صورت عمومی کمینه می‌کند، همگرا می‌شوند. لذا، قضیه زیر برقرار است:

قضیه ۱۵ (شرط همگرایی کنترل‌کننده پیش‌بین غیرخطی گروهی ذرات): ذرات در کنترل‌کننده پیش‌بین غیرخطی گروهی ذرات در هر بعد به‌سمت بهترین فرامین کنترلی همگرا می‌شوند؛ اگر شرایط $-1<\alpha-\mathrm{w}<3$ و $-1<\mathrm{w}<1$ برقرار باشد. جاییکه $\alpha=\mathrm{c}_1 r_1+\mathrm{c}_2 r_2$ است.

۴.۷ نتایج شبیه‌سازی

این بخش به بررسی نتایج شبیه‌سازی الگوریتم فرود خودکار کانال طولی پرنده بدون‌سرنشین در حضور کنترل‌کننده پیش‌بین غیرخطی مبتنی بر بهینه‌سازی گروهی ذرات و فیلتر چندمدلی ابتکاری می‌پردازد. به‌منظور عملکرد ایمن در مرحله فرود، پس از ورود پرنده به محدوده فرود، ، پرنده با کاهش ارتفاع به‌صورت نمایی به سطح زمین می‌رسد. شکل ۵.۷ ارتفاع مطلوب را برحسب زمان در مرحله فرود را نشان می‌دهد. ابتدا پایداری کنترل‌کننده پیش‌بین غیرخطی گروهی ذرات در مسئله فرود خودکار پرنده بدون‌سرنشین در بخش ۱.۴.۷ بررسی می‌شود. در مرحله بعد، در بخش ۲.۴.۷ به بررسی نتایج شبیه‌سازی فرود خودکار پرنده بدون‌سرنشین در حضور کنترل‌کننده پیش‌بین غیرخطی گروهی ذرات پرداخته می‌شود. سپس، در بخش ۳.۴.۷ پدیده باد در مدل دینامیکی سیستم شبیه‌سازی شده و اثر آن بر رفتار کنترل‌کننده پیش‌بین غیرخطی ابتکاری و فیلتر چندمدلی مشاهده می‌شود. در نهایت، در بخش ۴.۴.۷ پدیده باد در کنترل‌کننده پیش‌بین غیرخطی ابتکاری گروهی ذرات و فیلتر چندمدلی جبران می‌شود.



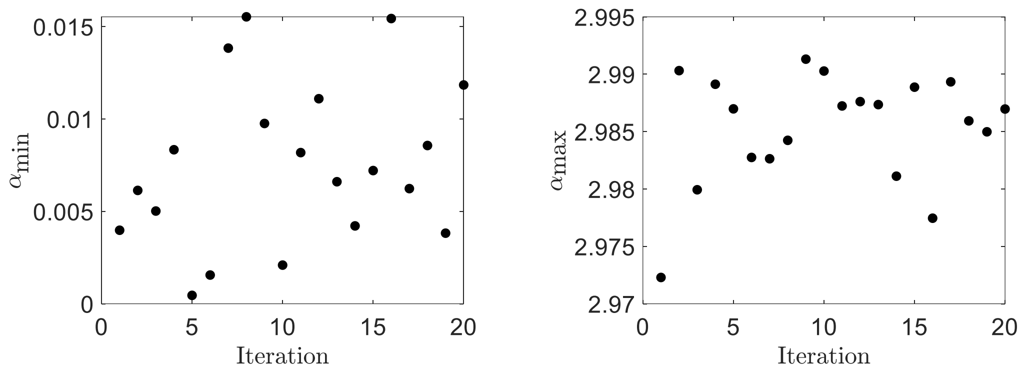
شکل ۵.۷ ارتفاع مطلوب برحسب زمان در مرحله فرود.

۱.۴.۷ تحلیل پایداری کنترل‌کننده پیش‌بین غیرخطی گروهی ذرات

در این پژوهش، $w = 0.8$ انتخاب شده‌است. در نتیجه، اولین شرط قضیه ۱۵ به‌منظور اثبات پایداری کنترل‌کننده پیش‌بین غیرخطی گروهی ذرات ارضا می‌شود. همچنین، شرط دیگر این قضیه به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$-0.2 < \alpha < 3.8 \qquad (۴۲.۷)$$

توجه کنیم که در حین اجرای الگوریتم پارامتر α برای ذرات مختلف و در زمان‌های مختلف، متفاوت و با تکرار حلقه داخلی الگوریتم متغیر است. تغییرات مقدار کمینه و بیشینه پارامتر α (در همه زمان‌ها و برای همه ذرات)، در سناریوی فرود درنظرگرفته‌شده، در شکل ۶.۷ نشان داده شده‌است. همانطور که مشاهده می‌شود، دومین شرط پایداری کنترل‌کننده برقرار است. بنابراین، ذرات به بهترین فرمان کنترلی در هر لحظه از زمان نمونه‌برداری همگرا خواهند شد.

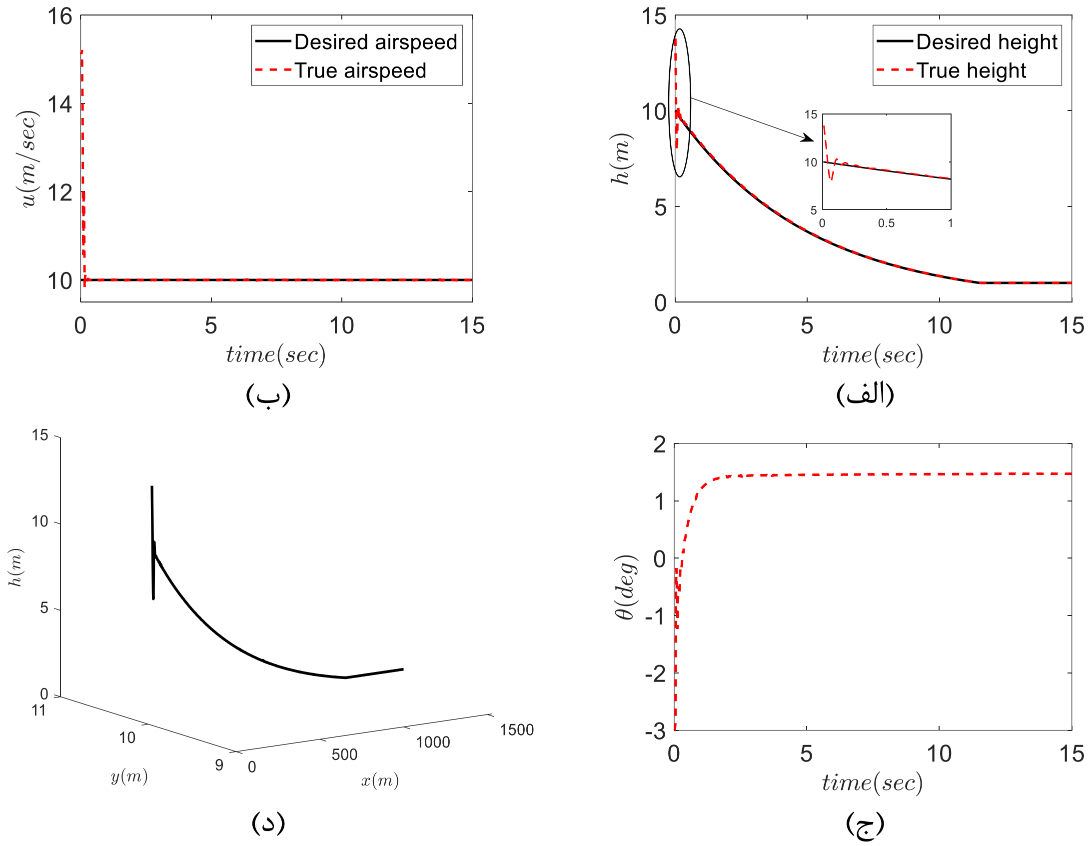


(ب) (الف)

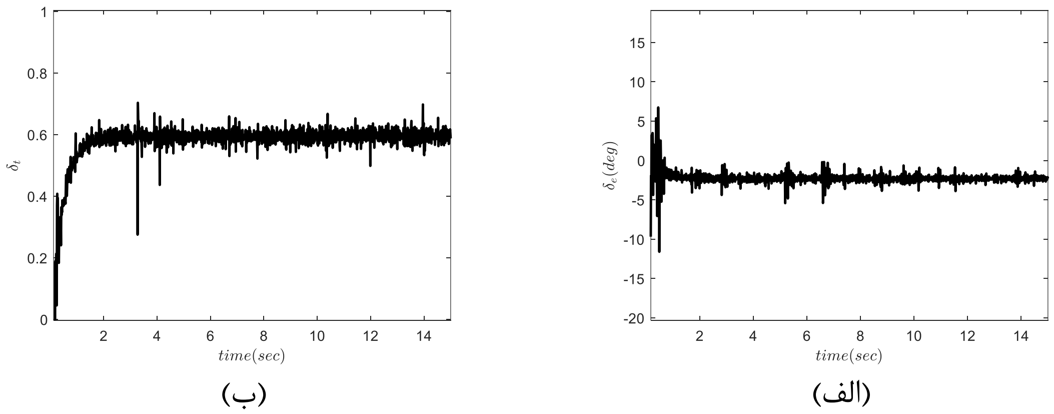
شکل ۶.۷ تغییرات α بر حسب تعداد دفعات تکرار حلقه داخلی: الف) بیشینه ب) کمینه.

۲.۴.۷ شبیه‌سازی الگوریتم فرود

این بخش به شبیه‌سازی الگوریتم فرود در حضور کنترل‌کننده پیش‌بین غیرخطی گروهی ذرات می‌پردازد. عملکرد کنترل‌کننده در شکل ۷.۷ نشان داده شده‌است. شکل ۷.۷ (الف) و (ب) به‌ترتیب ارتفاع و سرعت طولی مطلوب را با مقادیر شبیه‌سازی‌شده مقایسه می‌کند. شکل ۷.۷ (ج) تاریخچه زمانی زاویه پیچ را نمایش می‌دهد. تاریخچه زمانی فرامین کنترلی در مرحله فرود در شکل ۸.۷ نشان داده شده‌است. نتایج شبیه‌سازی حاکی از کارآیی مناسب کنترل‌کننده پیش‌بین غیرخطی گروهی ذرات به‌منظور ردگیری الگوریتم فرود است.



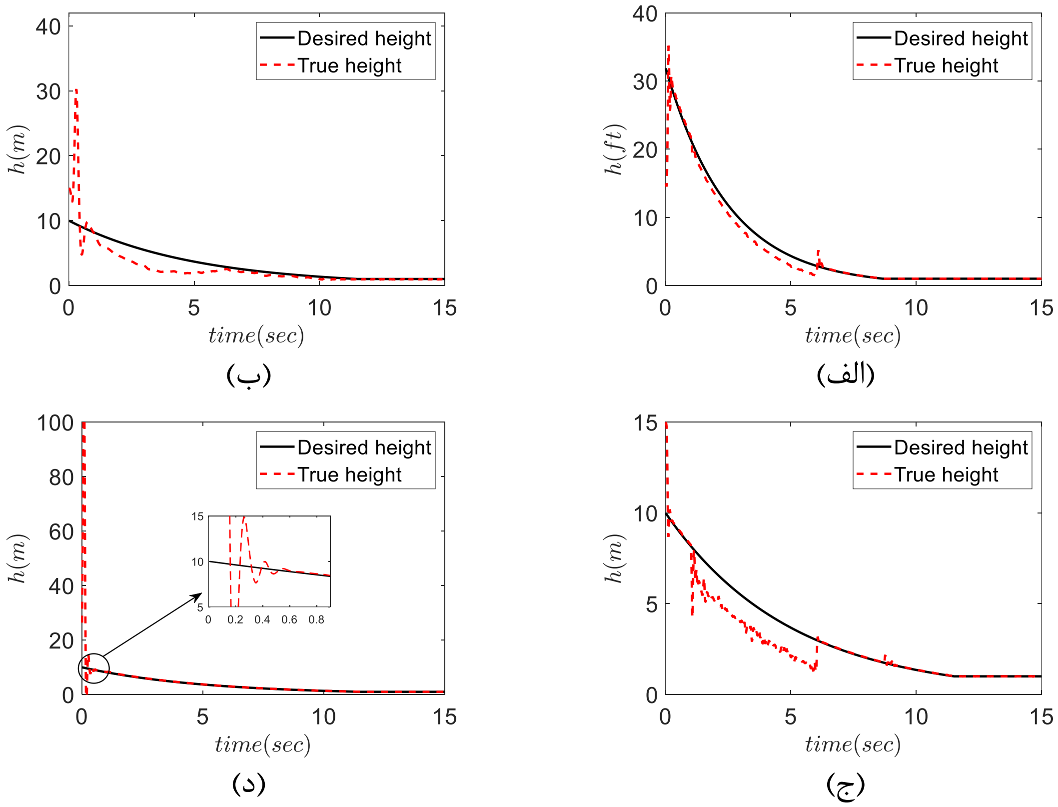
شکل ۷.۷ عملکرد کنترل‌کننده پیش‌بین غیرخطی گروهی ذرات در مرحله فرود الف) مقایسه ارتفاع مطلوب با مقدار شبیه‌سازی‌شده ب) مقایسه سرعت طولی مطلوب با مقدار شبیه‌سازی‌شده ج) زاویه پیچ پرنده د) مسیر فرود.



شکل ۸.۷ تاریخچه زمانی فرامین کنترلی در مرحله فرود الف) انحراف سطح کنترلی الویتور ب) انحراف تراتل.

۳.۴.۷ بررسی اثر باد بر عملکرد الگوریتم فرود

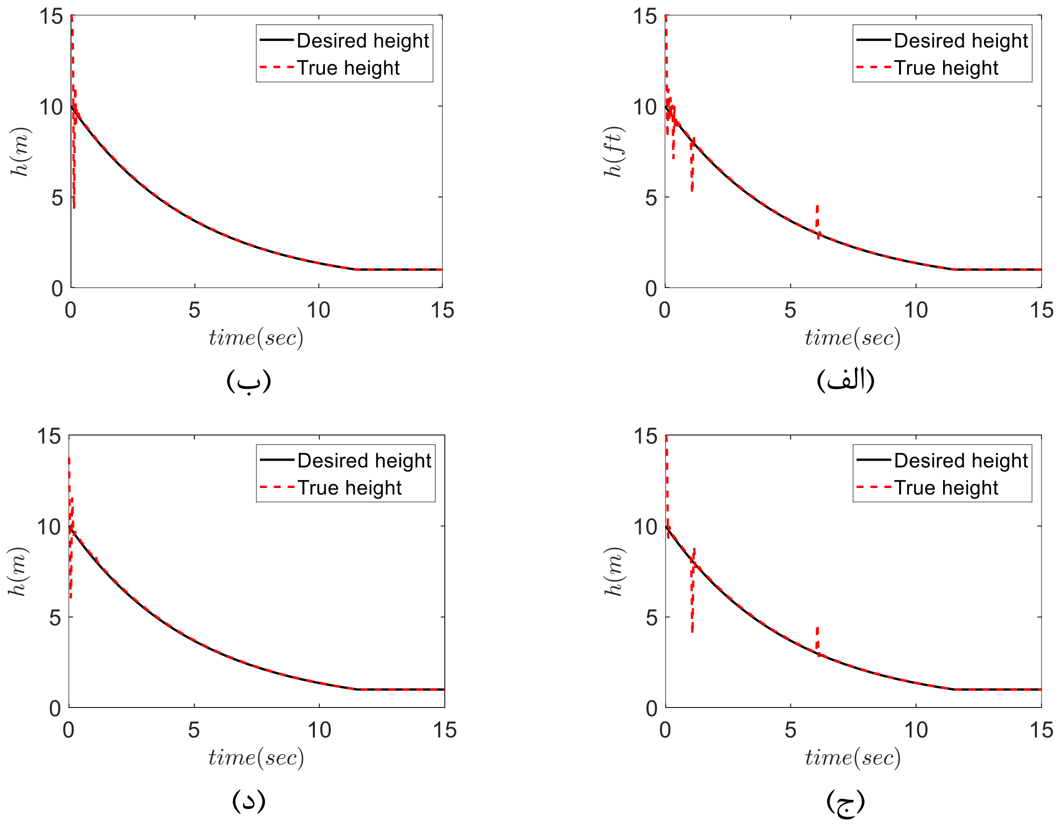
در این بخش، به بررسی اثر باد بر عملکرد الگوریتم فرود خودکار پرنده بدون‌سرنشین پرداخته می‌شود. به‌این منظور، چند پدیده باد معین در مدل دینامیکی سیستم شبیه‌سازی‌شده و اثر آن بر رفتار کنترل‌کننده و تخمین‌گر بررسی می‌شود. در این حالت، مولفه‌های سرعت باد شامل بادهای ثابت، "1-cosine"، برشی و مایکروبرست به کانال طولی پرنده اعمال می‌شود. همچنین، شکل ۹.۷ به مقایسه ارتفاع مطلوب با ارتفاع شبیه‌سازی‌شده در مرحله فرود تحت تاثیر پدیده باد در حضور کنترل‌کننده پیش‌بین غیرخطی گروهی ذرات و فیلتر چندمدلی ابتکاری می‌پردازد. لازم به ذکر است که مدل باد از ثانیه ۱ تا ثانیه ۶ به پرنده اعمال می‌شود و قبل و بعد از آن باد صفر درنظر گرفته شده است. پارامترهای هر یک از مدل‌های باد در جدول ۱.۷ نشان داده شده‌است. نتایج شبیه‌سازی حاکی از عملکرد نامناسب کنترل‌کننده در حضور باد است. لذا، باید باد در کنترل‌کننده پیش‌بین غیرخطی گروهی ذرات جبران شود.



شکل ۹.۷ بررسی عملکرد کنترل‌کننده پیش‌بین غیرخطی گروهی ذرات در حضور پدیده باد و در مرحله فرود الف) باد ثابت ب) باد "1-cosine" ج) باد برشی د) مایکروبرست.

۴.۴.۷ جبران اثر باد

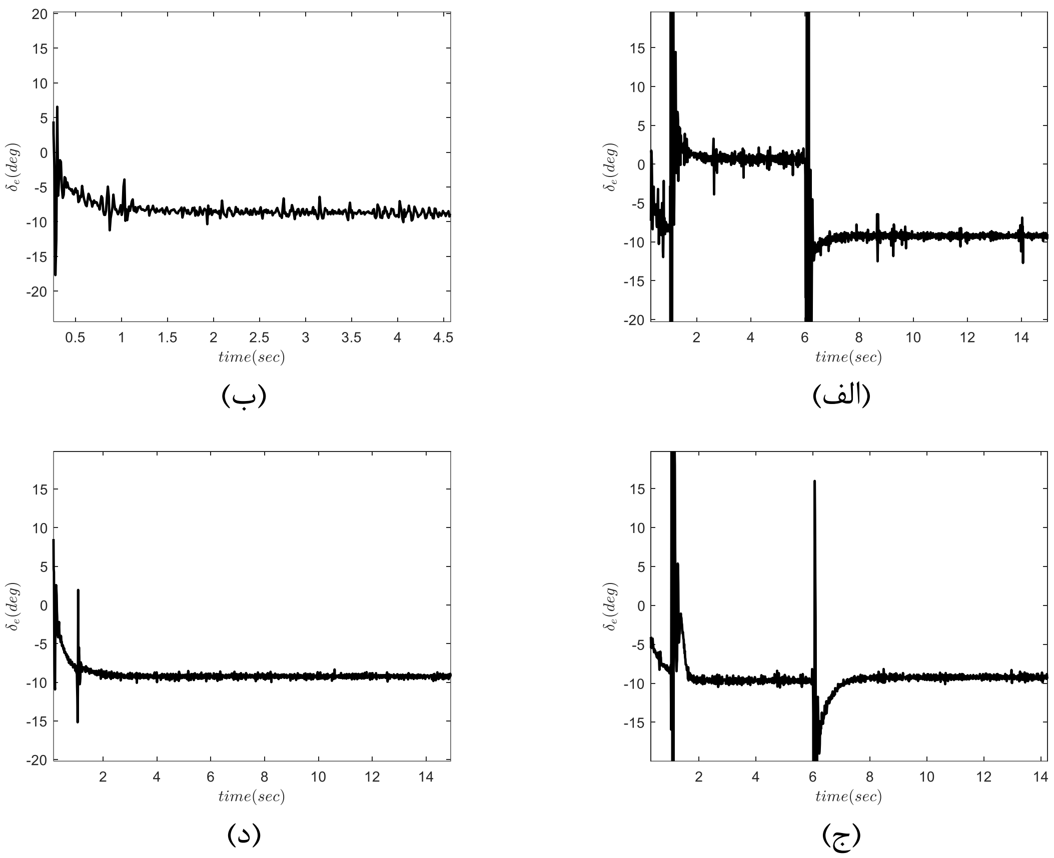
در این بخش به بررسی جبران اثر باد بر عملکرد الگوریتم فرود خودکار پرداخته می‌شود. به‌این‌منظور، اثر باد در مدل سیستم شبیه‌سازی شده و سپس در روابط کنترل‌کننده نیز جبران می‌شود. در این حالت، مولفه‌های سرعت باد شامل بادهای ثابت، سینوسی، برشی و مایکروبرست به کانال طولی پرنده اعمال می‌شود. شکل ۱۰.۷، ارتفاع مطلوب را با ارتفاع شبیه‌سازی‌شده، با درنظرگرفتن پدیده باد در مدل سیستم و جبران آن در کنترل‌کننده مقایسه می‌کند. شکل ۱۰.۷ (الف)، (ب)، (ج) و (د)، به‌ترتیب عملکرد کنترل‌کننده را در حضور بادهای ثابت، ”1-cosine“، برشی و مایکروبرست نشان می‌دهد. همچنین، تاریخچه زمانی انحراف سطح کنترلی الویتور در مرحله فرود در شکل ۱۱.۷ نشان داده شده‌است.از آنجا که، پدیده باد در کنترل‌کننده و فیلتر جبران شده‌است؛ نتایج شبیه‌سازی حاکی از عملکرد مناسب کنترل‌کننده و فیلتر در حضور باد است.



شکل ۱۰.۷ بررسی عملکرد کنترل‌کننده پیش‌بین غیرخطی گروهی ذرات با جبران پدیده باد در مرحله فرود الف) باد ثابت ب) باد ”1-cosine“ ج) باد برشی د) مایکروبرست.

جدول ۱.۷ پارامترهای مدل باد.

نوع باد	پارامتر	واحد	مقدار	نوع باد	پارامتر	واحد	مقدار
ثابت	u_g^N	۵۰	m/s	“1-cosine”	$u_m=w_m$	m/s	۵
	w_g^N	۴۰	m/s		$d_x=d_z$	m	۵۰۰
باد برشی	w_{20}	۲۰	m/s	مایکروبرست	h_{max}	m	۳۹۴
					r_{max}	m	۳۶۷۸/۵
	ψ_w	0	deg		u_{max}	m/s	۹۸/۴



شکل ۱۱.۷ تاریخچه زمانی انحراف سطح کنترلی الویتور در مرحله فرود الف) باد ثابت ب) باد-1“ cosine” ج) باد برشی د) مایکروبرست.

۵.۷ نتیجه‌گیری

در این فصل، نتایج شبیه‌سازی الگوریتم فرود خودکار پرنده بدون سرنشین در حضور کنترل‌کننده پیش‌بین ابتکاری و فیلتر چندمدلی بررسی شد. به‌این منظور، ابتدا روند طراحی کنترل‌کننده پیش‌بین ابتکاری غیرخطی گروهی ذرات معرفی شد. سپس، پایداری کنترل‌کننده پیش‌بین غیرخطی اثبات شد. در نهایت، علاوه بر نتایج مربوط به شبیه‌سازی پدیده باد در مدل سیستم و تاثیر آن بر عملکرد فیلتر و کنترل‌کننده، نتایج مربوط به جبران پدیده باد در کنترل‌کننده مشاهده شد.

۸ پیاده‌سازی فیلترهای چندمدلی و کنترل‌کننده

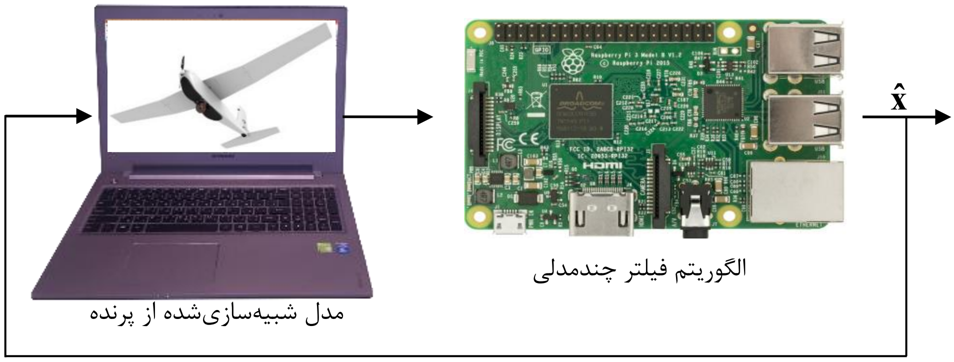
در این فصل، نحوه شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه (HIL) فیلترهای چندمدلی و شبیه‌سازی پردازشگر در حلقه (PIL)[1] کنترل‌کننده پیش‌بین بیان می‌شود. جایگاه شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه و پردازشگر در حلقه در طراحی مبتنی بر مدل در پیوست "ص" توضیح داده شده‌است. به این‌منظور، ابتدا نحوه شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه فیلترهای چندمدلی در بخش ۱.۸ توضیح داده می‌شود. سپس، نحوه پیاده‌سازی کنترل‌کننده پیش‌بین مبتنی بر روش شبیه‌سازی پردازنده در حلقه در بخش ۲.۸ بیان می‌شود.

۱.۸ شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه فیلترهای چندمدلی

شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه (HIL) به‌منظور ارزیابی زمان حقیقی سخت‌افزار واقعی قبل از تست نهایی استفاده می‌شود [۱۳۷]. در این بخش، به‌منظور شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه، پردازشگر به مدل شبیه‌سازی‌شده پرنده بدون سرنشین در رایانه متصل است. در این‌صورت، ابتدا خروجی‌های مدل شبیه‌سازی پرنده بدون سرنشین در هر لحظه از زمان نمونه‌برداری از طریق پروتکل سریال یا پروتکل شبکه به پردازشگر ارسال می‌شود. سپس، با دریافت خروجی‌های پرنده، مولفه‌های باد و متغیرهای پرنده بدون سرنشین توسط پردازشگر تخمین‌زده می‌شود. در نهایت، داده‌های تخمین‌زده شده، به‌منظور نمایش، از پردازشگر به رایانه ارسال می‌شود [۱۳۸]. ساختار شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه فیلتر چندمدلی پدیده باد در شکل ۱.۸ نشان داده شده‌است.

در این بخش، نحوه شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه فیلترهای چندمدلی پدیده باد بیان می‌شود. به این‌منظور، ابتدا نحوه شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه فیلتر چندمدلی پدیده باد مبتنی بر فیلتر چندمدلی کالمن توسعه‌یافته در بخش ۱.۱.۸ توضیح داده می‌شود. سپس، در بخش ۲.۱.۸ نحوه شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه فیلتر چندمدلی ابتکاری بیان می‌شود.

[1] Processor In the Loop



شکل ۱.۸ شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه فیلتر چندمدلی پدیده باد.

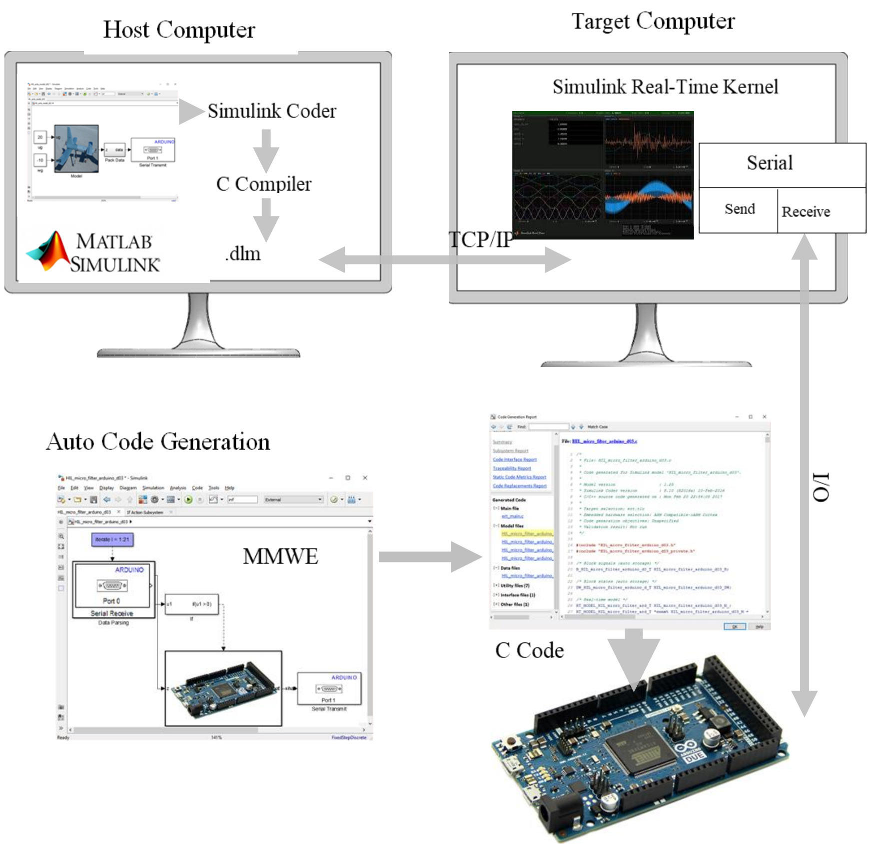
۱.۱.۸ فیلتر چندمدلی کالمن توسعه‌یافته

در این بخش، به اعتبارسنجی کد فیلتر چندمدلی پدیده باد مبتنی بر فیلتر چندمدلی کالمن توسعه‌یافته (MMWE) بر روی میکروکنترلر با انجام شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه پرداخته می‌شود. به این‌منظور، شرایط ابتدایی و پارامترهای فیلتر در شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه مشابه با شبیه‌سازی نرم‌افزاری درنظر گرفته شده‌است. جزییات شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه در شکل ۲.۸ نشان داده شده‌است.

به‌منظور پیاده‌سازی شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه از دو ابزار زمان حقیقی Simulink Real-Time [۱۳۹] و تولید خودکار کد [۱۴۰] استفاده می‌شود. ابزار زمان حقیقی Simulink Real Time به اجرای زمان حقیقی مدل شبیه‌سازی‌شده پرنده بدون سرنشین، که در محیط سیمولینک ایجاد شده‌است، با استفاده از یک رایانه میزبان و یک رایانه هدف می‌پردازد. همچنین، الگوریتم فیلتر چندمدلی در ابزار زمان حقیقی تولید خودکار کد به کد C تبدیل شده و سپس بر روی سخت‌افزار هدف (برد آردوینو) با استفاده از Simulink Coder پیاده‌سازی می‌شود.

به‌منظور شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه فیلتر چندمدلی پدیده باد، ابتدا مدل شبیه‌سازی‌شده پرنده با رابط‌های ورودی و خروجی در رایانه میزبان تولید می‌شود. سپس، این مدل با استفاده از Simulink Coder به کد C ترجمه می‌شود. در گام بعد، کد C ترجمه‌شده از طریق اتصال شبکه TCP/IP بر روی رایانه هدف پیاده‌سازی می‌شود. رایانه هدف از طریق پورت سریال به سخت‌افزار هدف متصل شده تا خروجی‌های تولیدی از مدل شبیه‌سازی پرنده را به سخت‌افزار هدف (برد آردوینو) ارسال کند. خروجی‌های پرنده، که از نوع double است، به‌منظور ارسال به میکروکنترلر در ۸ بایت (نوع uint8) بسته‌بندی می‌شود. علاوه بر داده اصلی، سه داده از نوع uint8 به‌عنوان هدر به‌منظور اطمینان از صحت

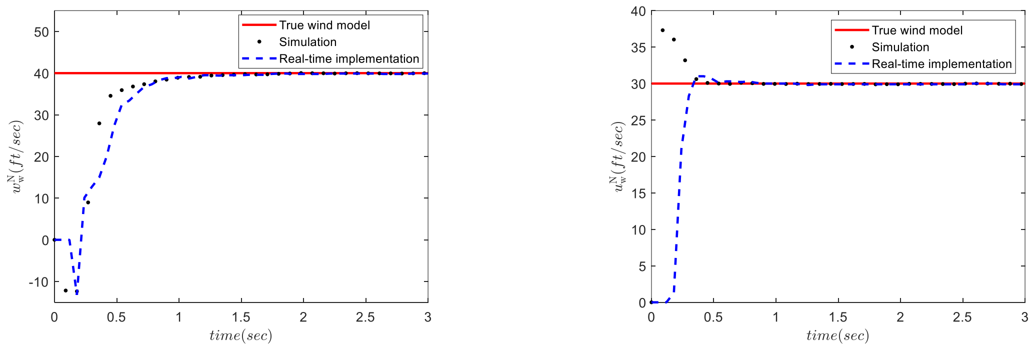
اطلاعات داده‌های دریافتی در میکروکنترلر ارسال می‌شود. سخت‌افزار هدف با دریافت خروجی‌های پرنده، مدل باد و متغیرهای حالت پرنده را تخمین می‌زند. سپس خروجی‌های تخمین‌زده را به رایانه هدف برای نمایش زمان حقیقی ارسال می‌کند.



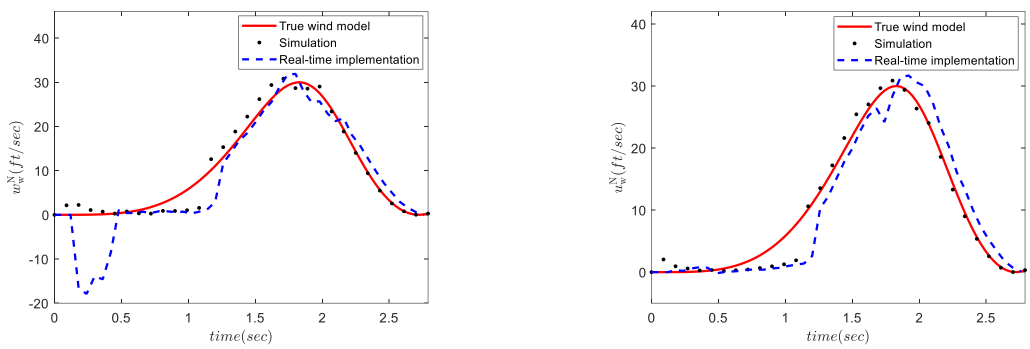
شکل ۲.۸ ساختار شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه فیلتر چندمدلی پدیده باد با استفاده از ابزارهای زمان حقیقی Simulink Real-Time و تولید خودکار کد.

شکل ۳.۸ پیاده‌سازی زمان‌حقیقی فیلتر چندمدلی کالمن توسعه‌یافته به‌منظور تخمین مدل باد.

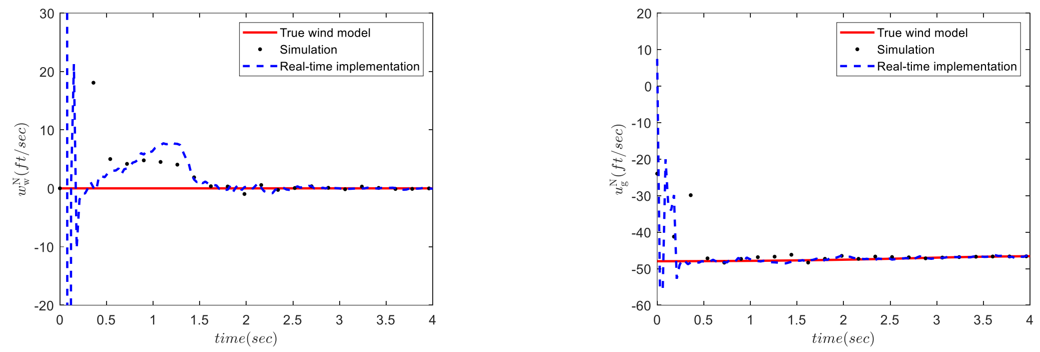
نتایج شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه (HIL) فیلتر چندمدلی کالمن توسعه‌یافته در شکل ۳.۸ نشان داده شده‌است. اعتبارسنجی شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه در تخمین مدل باد در شکل ۴.۸ نشان داده شده‌است. نتایج شبیه‌سازی و نتایج پیاده‌سازی زمان حقیقی به‌منظور تخمین مدل باد ثابت در شکل ۴.۸ (الف) مقایسه شده‌است. همچنین، نتایج شبیه‌سازی نرم‌افزاری و نتایج شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه به‌منظور تخمین مدل باد "1-cosine" در شکل ۴.۸ (ب) مقایسه شده‌است. شکل ۴.۸ (ج) و شکل ۴.۸ (د) به‌ترتیب نتایج شبیه‌سازی نرم‌افزاری و نتایج شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه مرتبط با باد برشی و مایکروبرست را نشان می‌دهد. اختلافات بین نتایج شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه و نتایج نرم‌افزاری می‌تواند ناشی از مشکلات عملی همچون کاهش دقت داده‌های خروجی پرنده با تبدیل به uint8، از دست‌رفتن داده‌ها در میکروکنترلر و تاخیر داده‌های دریافتی شود.



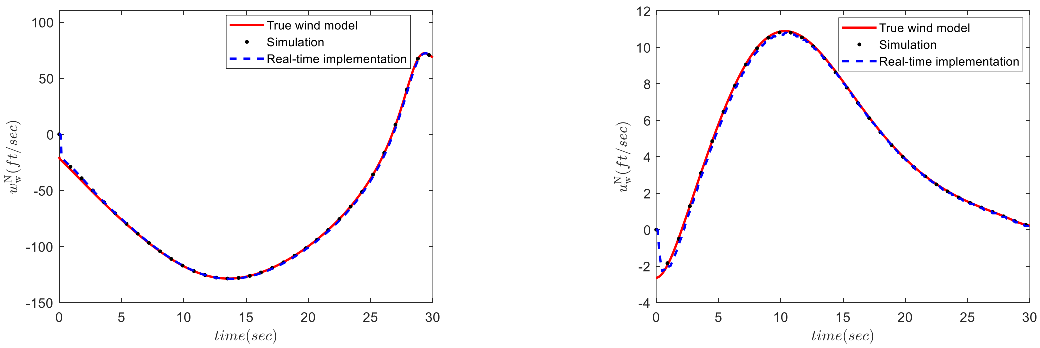
(الف)



(ب)



(ج)



(د)

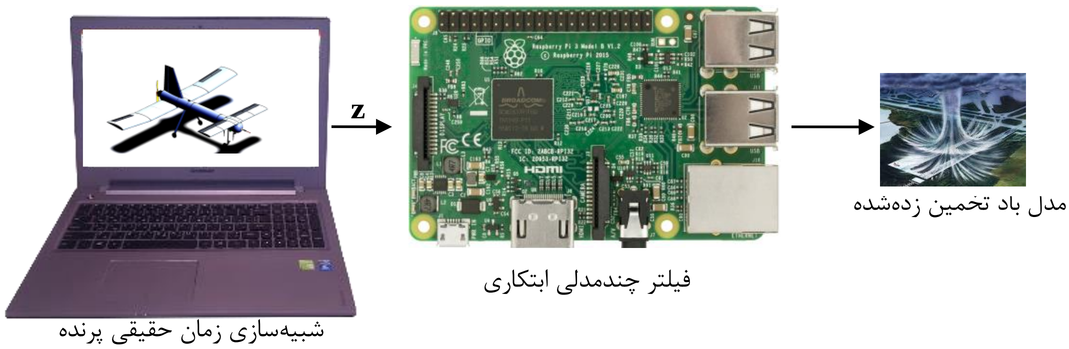
شکل ۴.۸ مقایسه نتایج شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه و نرم‌افزاری فیلتر چندمدلی کالمن توسعه‌یافته در تخمین مدل باد: الف) باد ثابت ب) باد "1-cosine" ج) باد برشی د) مایکروبرست.

۲.۱.۸ فیلتر چندمدلی ابتکاری توسعه‌یافته پیوسته تودهای مورچه‌ها

این بخش به اعتبارسنجی عملکرد سخت‌افزار فیلتر چندمدلی ابتکاری توسعه‌یافته پیوسته تودهای مورچه‌ها (MMECACF) با استفاده از شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه می‌پردازد. به این‌منظور، الگوریتم فیلتر چندمدلی بر روی یک پردازنده، که به مدل شبیه‌سازی‌شده پرنده بدون سرنشین در رایانه متصل است، مطابق با شکل ۵.۸ پیاده‌سازی می‌شود. شرایط ابتدایی و پارامترهای فیلتر در شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه مشابه با شبیه‌سازی نرم‌افزاری درنظر گرفته شده‌است.

به‌منظور پیاده‌سازی شبیه‌سازی زمان حقیقی سخت‌افزار در حلقه از دو ابزار زمان حقیقی Simulink Desktop Real-Time [۱۴۱] و تولید خودکار کد استفاده می‌شود. ابزار زمان حقیقی Simulink Desktop Real Time به اجرای زمان حقیقی مدل شبیه‌سازی‌شده پرنده بدون سرنشین، که در محیط سیمولینک ایجاد شده‌است، با استفاده از یک رایانه میزبان و یک رایانه هدف می‌پردازد. همچنین،

الگوریتم فیلتر چندمدلی در ابزار زمان حقیقی تولید خودکار کد به کد C تبدیل شده و سپس بر روی سخت‌افزار هدف با استفاده از Coder Simulink پیاده‌سازی می‌شود. جزییات شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه فیلتر چندمدلی ابتکاری توسعه‌یافته پیوسته تودهای مورچه‌ها (MMECACF) در شکل ۶.۸ نشان داده شده‌است.



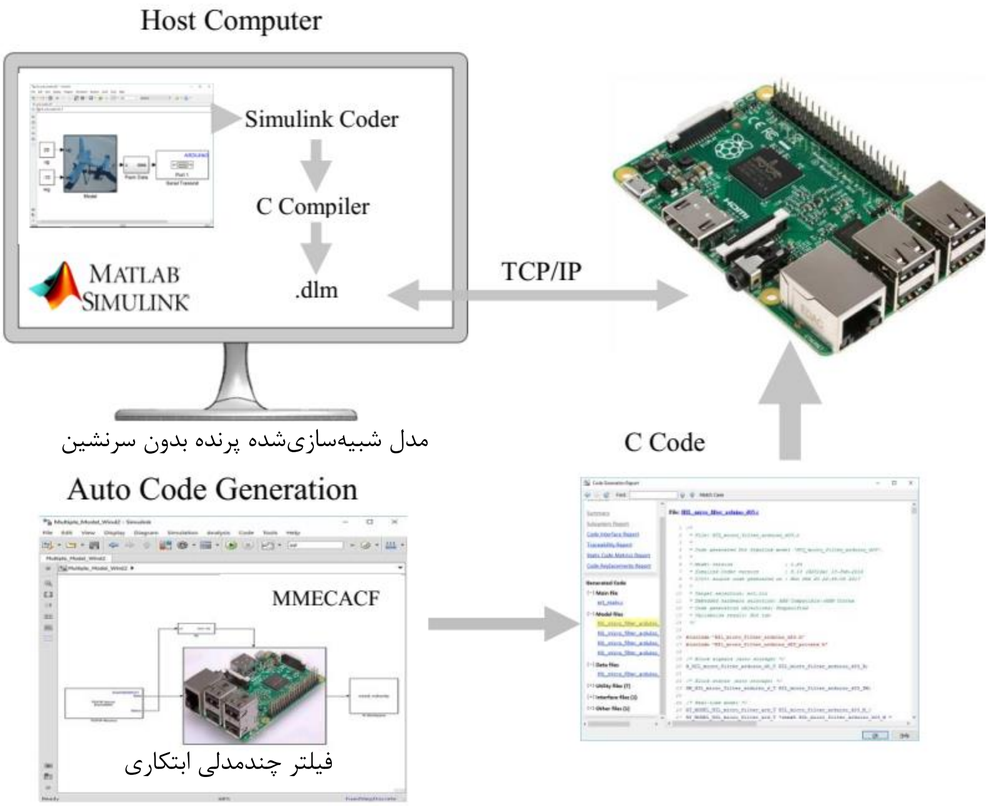
شکل ۵.۸ شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه به‌منظور اعتبارسنجی فیلتر چندمدلی ابتکاری.

ابتدا مدل شبیه‌سازی‌شده پرنده بدون سرنشین با استفاده از Simulink Coder به کد C ترجمه شده تا در یک رایانه زمان حقیقی اجرا شود. در گام بعد، کد C ترجمه‌شده از طریق اتصال شبکه TCP/IP بر روی پردازنده پیاده‌سازی می‌شود. رایانه هدف از طریق اتصال شبکه TCP/IP خروجی‌های تولید شده از مدل شبیه‌سازی پرنده بدون سرنشین را به سخت‌افزار هدف (ریزپردازنده Raspberry pi) ارسال می‌کند. سخت‌افزار هدف با دریافت خروجی‌های پرنده بدون سرنشین، مدل باد و متغیرهای حالت پرنده را تخمین می‌زند. سپس، خروجی‌های تخمین را به رایانه هدف برای نمایش زمان حقیقی ارسال می‌کند.

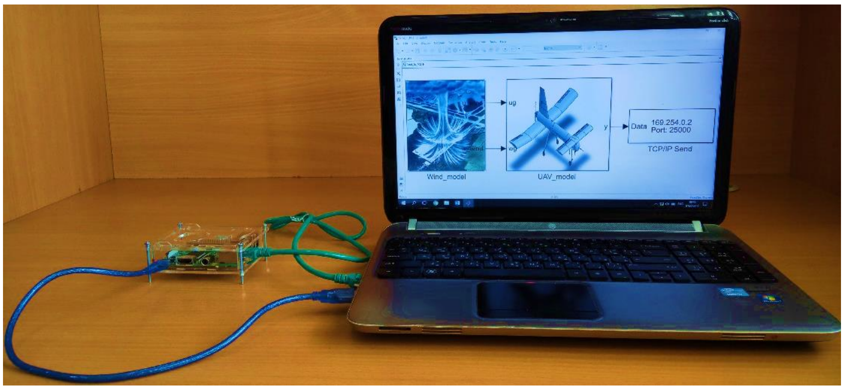
پیاده‌سازی زمان‌حقیقی فیلتر چندمدلی ابتکاری توسعه‌یافته پیوسته تودهای مورچه‌ها (MMECACF) در شکل ۷.۸ نشان داده شده‌است. اعتبارسنجی شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه به‌منظور تخمین مدل باد در شکل ۸.۸ نشان داده شده‌است. شکل ۸.۸ (الف) نتایج شبیه‌سازی نرم‌افزاری و نتایج پیاده‌سازی زمان حقیقی را در تخمین مدل باد ثابت مقایسه می‌کند. نتایج شبیه‌سازی نرم‌افزاری و نتایج شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه به‌منظور تخمین مدل باد ”1-cosine“ در شکل ۸.۸ (ب)

مقایسه شده‌است. شکل ۸.۸ (ج) و شکل ۸.۸ (د) به‌ترتیب نتایج حاصل از باد برشی و نتایج حاصل از مایکروبرست را نشان می‌دهد.

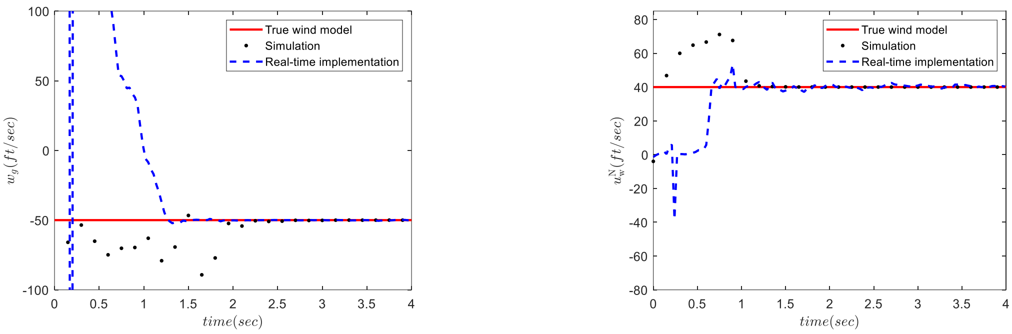
نتایج نشان می‌دهد که الگوریتم MMECACF می‌تواند به‌صورت موفقیت‌آمیز بر روی یک ریزپردازنده پیاده‌سازی شود. همچنین، وجود اختلافات ناچیز بین نتایج آزمایشگاهی ناشی از شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه و نتایج نرم‌افزاری می‌تواند ناشی از مشکلات عملی همچون تاخیر داده‌های دریافتی، طبیعت تصادفی نویز از یک آزمایش به آزمایش دیگر و غیره باشد. نتایج پیاده‌سازی نشان می‌دهد که بهتر است شروع استفاده از نتایج فیلترهای تخمین باد حداقل یک ثانیه دیرتر از آغاز به کار فیلتر باشد.



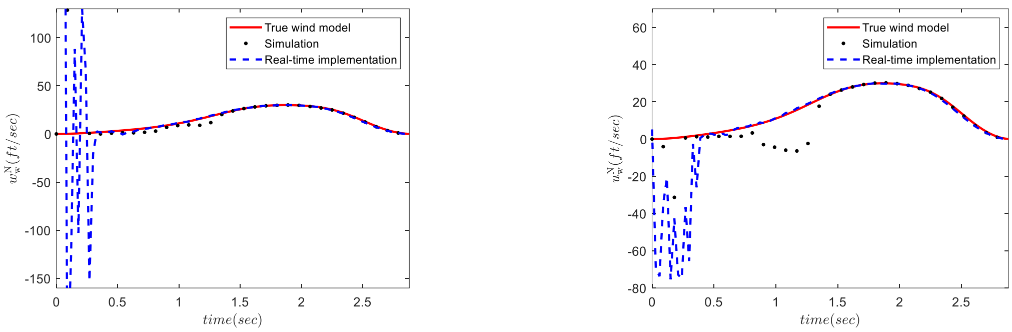
شکل ۶.۸ ساختار شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه فیلتر چندمدلی ابتکاری با استفاده از ابزارهای زمان حقیقی Simulink Desktop Real-Time و تولید خودکار کد.



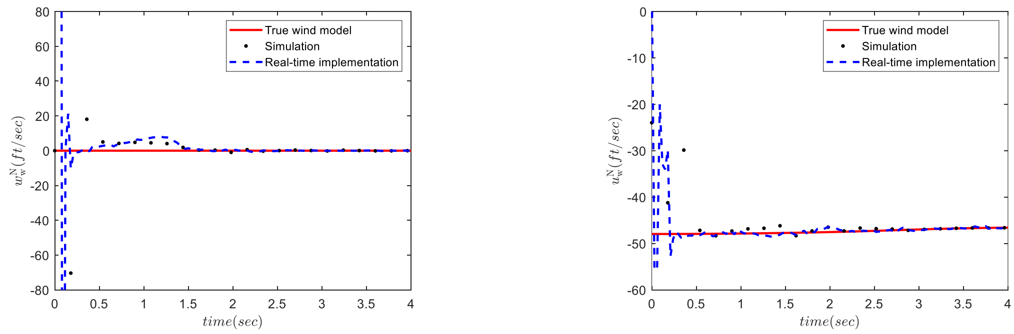
شکل ۷.۸ پیاده‌سازی زمان حقیقی فیلتر چندمدلی ابتکاری.



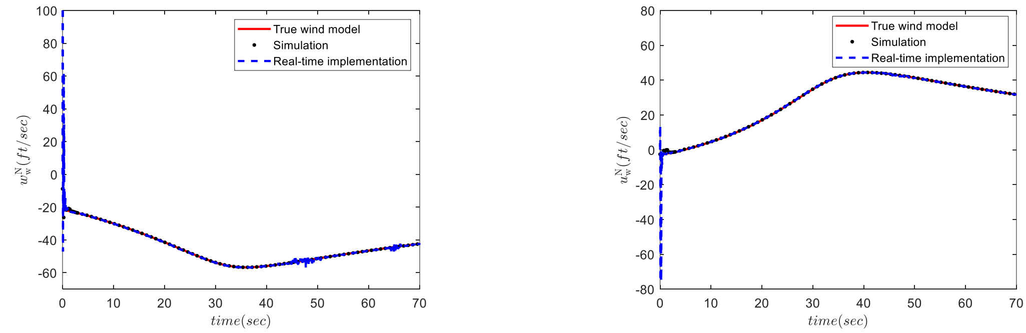
(الف)



(ب)



(ج)



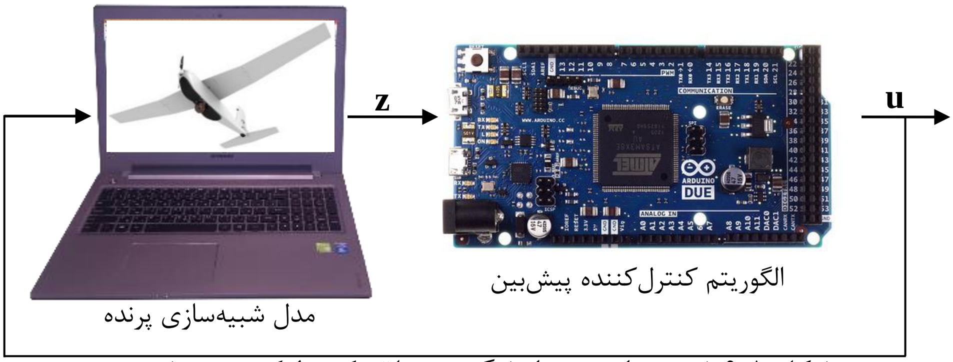
(د)

شکل ۸.۸ مقایسه نتایج شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه و شبیه‌سازی نرم‌افزاری فیلتر چندمدلی ابتکاری در تخمین مدل باد: الف) باد ثابت ب) باد "1-cosine" ج) باد برشی د) مایکروبرست.

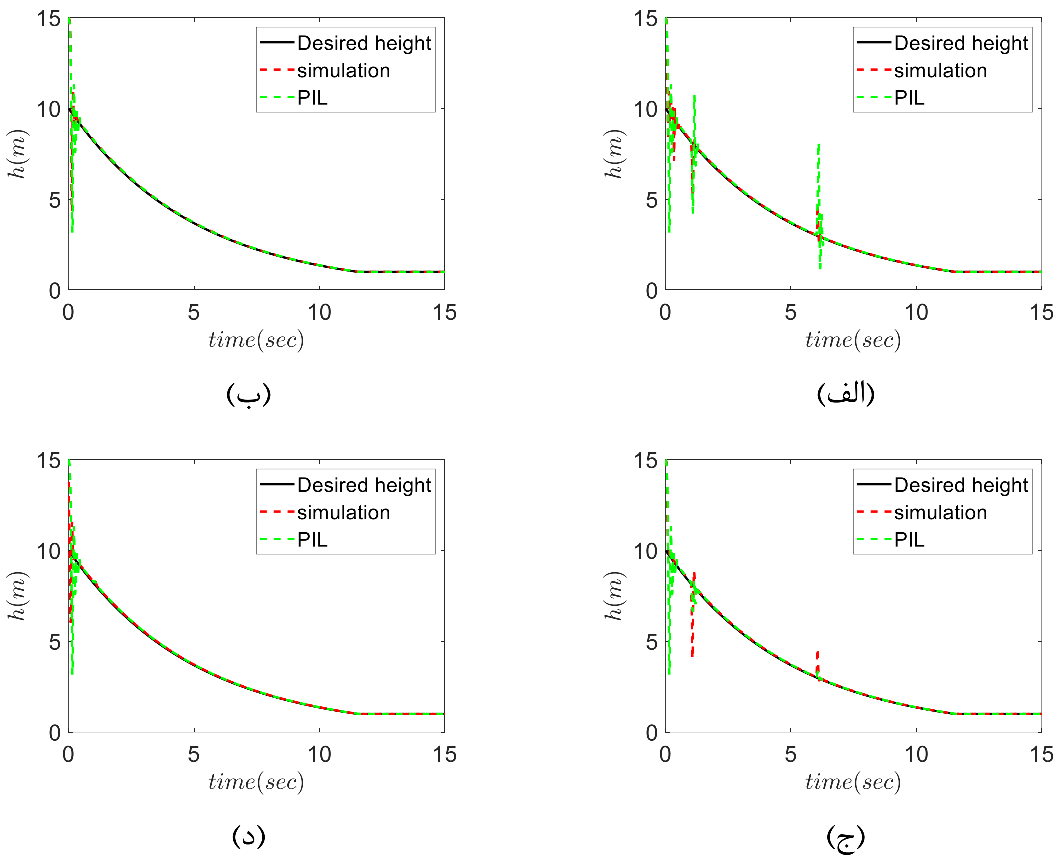
۲.۸ شبیه‌سازی پردازشگر در حلقه کنترل‌کننده‌پیش‌بین

یکی از معایب کنترل‌کننده پیش‌بین حجم محاسبات آن است. از این‌رو، لازم است قابلیت پیاده‌سازی مسئله بهینه‌سازی در کنترل‌کننده بررسی شود. در این بخش، شبیه‌سازی پردازشگر در حلقه (PIL) [۱۴۲] به‌منظور اعتبارسنجی کد کنترل‌کننده پیش‌بین برروی یک پردازشگر، که به مدل شبیه‌سازی پرنده موجود در رایانه متصل است، انجام می‌شود. شرایط اولیه و پارامترهای کنترل‌کننده پیش‌بین مشابه با شبیه‌سازی نرم‌افزاری است. ساختار شبیه‌سازی پردازشگر در حلقه در شکل ۹.۸ نشان داده شده‌است.

رایانه به‌منظور ارسال خروجی‌های مدل شبیه‌سازی پرنده به پردازشگر از طریق لینک سریال متصل می‌شود. سپس، پردازشگر با دریافت خروجی‌های پرنده، فرامین کنترلی را تولید و به‌منظور اعمال به دینامیک شبیه‌سازی‌شده پرنده، به رایانه ارسال می‌کند. نتایج شبیه‌سازی پردازشگر در حلقه به‌منظور فرود خودکار پرنده با جبران پدیده باد در حضور کنترل‌کننده پیش‌بین غیرخطی گروهی ذرات در شکل ۱۰.۸ نشان داده شده‌است. نتایج حاکی از پیاده‌سازی موفق کنترل‌کننده بر روی پردازشگر است.



شکل ۹.۸ شبیه‌سازی پردازشگر در حلقه کنترل‌کننده پیش‌بین.



شکل ۱۰.۸ نتایج شبیه‌سازی پردازشگر در حلقه به‌منظور تولید فرمان کنترل‌کننده با جبران پدیده باد الف) باد ثابت ب) باد سینوسی ج) باد برشی د) مایکروبرست.

۳.۸ نتیجه‌گیری

در این فصل، نحوه شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه فیلترهای چندمدلی و شبیه‌سازی پروسسور در حلقه کنترل‌کننده پیش‌بین بیان شد. به این‌منظور، ابتدا نحوه شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه فیلترهای چندمدلی توضیح داده شد. شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه توانایی پیاده‌سازی زمان حقیقی فیلترهای چندمدلی را صحت‌سنجی کرد. در گام بعد، نحوه پیاده‌سازی کنترل‌کننده پیش‌بین مبتنی بر روش شبیه‌سازی پروسسور در حلقه بیان شد. شبیه‌سازی پردازشگر در حلقه قابلیت پیاده‌سازی کنترل‌کننده پیش‌بین غیرخطی ابتکاری را تایید کرد.

۹ جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در پژوهشی که از نظر گذشت، یک تخمین‌گر چندمدلی پدیده باد شامل یک فیلتر چندمدلی استاتیکی مبتنی بر فیلتر کالمن توسعه‌یافته و یک فیلتر چندمدلی ابتکاری جدید، که فیلتر چندمدلی ابتکاری توسعه‌یافته پیوسته توده‌ای مورچه‌ها نامیده شد، به‌منظور شناسایی نوع مدل باد، پارامترهای آن و نیز متغیرهای حالت یک پرنده بدون سرنشین بال‌ثابت بدون اندازه‌گیری مستقیم از حسگر سرعت هوا پیشنهاد و نتایج آن توسط کنترل‌کننده پیش‌بین غیرخطی ابتکاری جبران شد. به‌این منظور، دینامیک طولی پرنده و سپس پدیده باد به‌عنوان عامل موثر در مسئله پرواز پرنده بدون سرنشین بال‌ثابت مدل‌سازی شد. به‌منظور مدل‌کردن باد، از مدل‌های استاندارد موجود در مراجع شامل مدل باد ثابت، مدل باد "1-cosine"، مدل باد برشی و مدل مایکروبرست استفاده شد.

در گام بعد، تعاریف و قضایای مرتبط با مشاهده‌پذیری قوی، مشاهده‌پذیری ورودی‌های نامعلوم، مشاهده‌پذیری توامان متغیرهای حالت و ورودی‌های نامعلوم، مشاهده‌پذیری ورودی‌های نامعلوم در حضور ماتریس ورودی‌های نامعلوم متغیر با زمان و نیز مشاهده‌پذیری متغیرهای حالت در حضور خطای خطی‌سازی برای سیستم‌های خطی پیوسته و گسسته زمان، که شامل چهار قضیه جدید است، بیان و اثبات شد. این مفاهیم در مساله تخمین باد در پرواز پرنده بدون‌سرنشین بررسی شد. به‌علاوه، مشاهده‌پذیری پارامترهای باد با استفاده از تئوری مشاهده‌پذیری سیستم‌های غیرخطی بررسی شد. نتایج نشان می‌دهد که متغیرهای حالت پرنده و مولفه‌های باد با استفاده از خروجی حسگرها قابل بازیابی هستند.

همچنین، از فیلترهای چندمدلی پیشنهادی برای تخمین همزمان مدل باد و متغیرهای حالت پرنده استفاده شد. عملکرد این فیلترها در پروازهای ایستا و مانوری بررسی و با عملکرد فیلتر کالمن توسعه‌یافته و فیلتر ابتکاری توسعه‌یافته پیوسته توده‌ای مورچه‌ها مقایسه شد. نتایج حاکی از عملکرد مناسب فیلترهای چندمدلی در یافتن مدل واقعی باد و متغیرهای حالت پرنده بدون سرنشین است.

در مرحله بعد، جبران‌سازی نتایج تخمین در حلقه کنترل مسیر پرواز پرنده در حین فرود، با استفاده از یک کنترل‌کننده پیش‌بین ابتکاری غیرخطی مبتنی بر بهینه‌سازی گروهی ذرات انجام شد. همچنین، پایداری کنترل‌کننده پیش‌بین غیرخطی گروهی ذرات اثبات شد. در نهایت، امکان پیاده‌سازی زمان‌حقیقی الگوریتم‌های پیشنهادی با انجام شبیه‌سازی پردازشگر در حلقه و سخت‌افزار در حلقه بررسی شد. نتایج حاکی از بهبود فرآیند فرود خودکار پرنده بال‌ثابت در صورت جبران‌سازی مدل باد در کنترل‌کننده پیش‌بین غیرخطی ابتکاری است.

۱.۹ نوآوری‌ها

نوآوری‌های این پژوهش به شرح زیر است:

- تخمین نوع مدل باد با استفاده از فیلتر چندمدلی.
- تخمین متغیرهای حالت، نوع مدل باد و پارامترهای آن بدون استفاده از سنسور سرعت هوا[1].
- توسعه فیلتر هیبریدی توسعه‌یافته پیوسته توده‌ای مورچه‌ها.
- توسعه یک فیلتر چندمدلی هیبریدی ابتکاری.
- استخراج قضیه مشاهده‌پذیری ورودی‌های نامعلوم برای سیستم‌های خطی گسسته و پیوسته زمان.
- استخراج قضیه مشاهده‌پذیری توأمان متغیرهای حالت و ورودی‌های نامعلوم برای سیستم‌های خطی گسسته و پیوسته زمان.
- استخراج قضایای مشاهده‌پذیری قوی، مشاهده‌پذیری ورودی‌های نامعلوم و مشاهده‌پذیری توأمان متغیرهای حالت و ورودی‌های نامعلوم برای سیستم‌های غیرخطی افاین پیوسته زمان.
- تحلیل مشاهده‌پذیری متغیرهای حالت، مشاهده‌پذیری قوی، مشاهده‌پذیری ورودی‌های نامعلوم و مشاهده‌پذیری توأمان متغیرهای حالت و ورودی‌های نامعلوم برای پرنده بدون‌سرنشین و پدیده باد.
- تحلیل مشاهده‌پذیری متغیرهای حالت برای سیستم‌های خطی پیوسته زمان در حضور خطای خطی‌سازی سیستم غیرخطی.

[1] Airspeed Sensor

- تحلیل مشاهده‌پذیری ورودی‌های نامعلوم در حضور تغییرات زمانی ماتریس ضرایب ورودی‌های نامعلوم برای سیستم‌های خطی پیوسته زمان.
- تحلیل مشاهده‌پذیری غیرخطی پارامترهای مدل باد از تئوری مشاهده‌پذیری سیستم‌های غیرخطی.
- تخمین مدل باد با استفاده از فیلتر غیرخطی مقاوم کالمن توسعه‌یافته در حضور عدم قطعیت مدل.
- طراحی کنترل‌کننده پیش‌بین غیرخطی گروهی ذرات برای پرنده بدون‌سرنشین در حضور باد.
- اثبات پایداری کنترل‌کننده پیش‌بین غیرخطی گروهی ذرات.
- جبران‌سازی مدل باد در کنترل‌کننده پیش‌بین غیرخطی ابتکاری.
- شبیه‌سازی سخت‌افزار در حلقه فیلتر چندمدلی باد مبتنی بر فیلتر چندمدلی کالمن توسعه‌یافته.
- شبیه‌سازی پردازشگر در حلقه کنترل‌کننده پیش‌بین غیرخطی ابتکاری.

۲.۹ مقالات مستخرج

مقالات مستخرج از این رساله به شرح زیر است:

✓ Journal Papers

1- H. Nobahari and AliReza Sharifi, "**Multiple Model Extended Continuous Ant Colony Filter Applied to Real-Time Estimation of the Wind in a Fixed-Wing UAV**", Journal of Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2020. (Impact Factor: 3.526)

2- H. Nobahari and AliReza Sharifi, "**A Hybridization of Extended Kalman Filter and Ant Colony Optimization for State Estimation of Nonlinear Systems**", Journal of Applied Soft Computing, 74, pp.411-423, 2019. (Impact Factor: 4.873)

✓ Journal Papers in preparation/submitted for review

3- H. Nobahari and **AliReza Sharifi**, "**A Multiple Model Approach for Online Estimation of the Wind in a Fixed-wing UAV**", Aerospace Science and Technology, (under review).

4- H. Nobahari and AliReza Sharifi, "**Strong and Unknown Input Observability Analysis for Affine Continuous-time Nonlinear Systems**". Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, (under review).

✓ مقالات کنفرانس منتشرشده

5- H. Nobahari and **AliReza Sharifi**, "**Wind Compensation in Nonlinear Model Predictive Controller based on the Particle Swarm Optimization for a fixed wing UAV**", The 7th International Conference on Robotics and Mechatronics, 20-21 November 2019, Sharif University of Technology, Tehran, Iran.

6- H. Nobahari, M. Raoufi and **Alireza Sharifi**, "**A Heuristic Filter Based on Firefly Algorithm for Nonlinear State**", IEEE SSCI, Symposium Series on Computational Intelligence, ATHEN, Greece, 2016.

7- AliReza Sharifi and H. Nobahari, "**Multiple Model Filters Applied to Wind Model Estimation for a Fixed Wing UAV**", International Conference on Mechanical and Aerospace Engineering (ICMAE) in 2016, London, United Kingdom, 2016.

۸- "تخمین باد در یک پرنده بدون سرنشین بال‌ثابت با استفاده از فیلتر کالمن توسعه‌یافته مقاوم"
نویسندگان: **علیرضا شریفی**- هادی نوبهاری، بیست و پنجمین همایش سالانه بین‌المللی مهندسی مکانیک ایران (ISME2017)، دانشگاه تربیت‌مدرس، اردیبهشت‌ماه سال **۱۳۹۶.**

۹- "تخمین مدل باد در یک پرنده بدون سرنشین بال‌ثابت مبتنی بر روش ناوبری مدل مبنا"
نویسندگان: **علیرضا شریفی**- هادی نوبهاری- حامد محمدکریمی، اولین کنفرانس بین‌المللی ناوبری و دومین همایش ملی ناوبری، دانشگاه صنعتی شریف، آذرماه سال **۱۳۹۵.**

منابع و مراجع

[۱] Goh, Juliana, and Douglas Wiegmann. "Human factors analysis of accidents involving visual flight rules flight into adverse weather." Aviation, space, and environmental medicine, 73.8, 817-822, 2002.

[۲] Jenamani, Rajendra Kumar, and Ashok Kumar. "Bad weather and aircraft accidents- global vis-a-vis Indian scenario." Current Science (Bangalore), 104.3 316-325, 2013.

[۳] K. A. Zhukov, V. V. Vyshinsky, and J. Rohacs, "Effects of atmospheric turbulence on UAV," 2014.

[۴] J. Etele, "Overview of wind gust modelling with application to autonomous low-level UAV control," Mechanical and Aerospace Engineering Department, Carelton University, Ottawa, Canada, 2006.

[۵] Stevens, Brian L., and Frank L. Lewis. "Aircraft control and simulation" John Wiley & Sons, 2003.

[۶] Roskam, Jan. "Airplane flight dynamics and automatic flight controls" DARcorporation, 1995.

[۷] Fujita, T. Theodore. "Downbursts: meteorological features and wind field characteristics." Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics36, 75-86, 1990.

[۸] www.apollo.lsc.vsc.edu/classes/met130/notes/chapter14/microburst1.html

[۹] www.shsu.edu/~dl_www/bkonline/131online/f12severe/12index.htm

[۱۰] Chay, M. T., Faris Albermani, and Richard Wilson. "Numerical and analytical simulation of downburst wind loads", Engineering Structures, 28.2, 240-254, 2006.

[۱۱] Chen, L., and C. W. Letchford. "Numerical simulation of extreme winds from thunderstorm downbursts." Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 95.9, 977-990, 2007

[۱۲] Ivan, Michael. "A ring-vortex downburst model for flight simulations." Journal of Aircraft, 23.3, 232-236. 1986

[۱۳] Zhu, Shangxiang, and Bernard Etkin. "Model of the wind field in a downburst." Journal of Aircraft, 22, no. 7, 595-601, 1985

[۱۴] Vicroy, Dan D. "A simple, analytical, axisymmetric microburst model for downdraft estimation", No. DOT/FAA/RD-91/10, 1991.

[۱۵] Oseguera, Rosam, and Rolandl Bowles. "A simple, analytic 3-dimensional downburst model based on boundary layer stagnation flow", 1988.

[۱۶] Psiaki, Mark L., and Kihong Park. "Thrust laws for microburst wind shear penetration." Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 15, no. 4, 968-975, 1992.

[۱۷] Turova, V. L. "Take-off control in a windshear." Preprint, Inst. Math. and Mech., Ekaterinburg, 1991.

[۱۸] Dogan, Atilla. "Guidance Strategies for Microburst Escape." 2000.

[۱۹] Cao, Yihua, et al. "Nonlinear inverse dynamics control of the aircraft in the presence of windshear." Aircraft Engineering and Aerospace Technology, 76.6, 592-599, 2004.

[۲۰] Holmes, J. D., and S. E. Oliver. "An empirical model of a downburst." Engineering Structures, 22.9, 1167-1172. 2000

[۲۱] B. Arain, and F. Kendoul, "Real-time wind speed estimation and compensation for improved flight," IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 50.2, 1599-1606, 2014.

[۲۲] Langelaan, Jack W., Nicholas Alley, and James Neidhoefer. "Wind field estimation for small unmanned aerial vehicles." Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 34.4, 1016-1030 2011.

[۲۳] https://hu.wikipedia.org/wiki/F%C3%A1jl:Pitot-cs%C5%91_helikopteren_4.jpg

[۲۴] Cho, Am, et al. "Wind estimation and airspeed calibration using a UAV with a single-antenna GPS receiver and pitot tube." Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on, 47.1, 109-117, 2011.

[۲۵] Van den Kroonenberg, Aline, et al. "Measuring the wind vector using the autonomous mini aerial vehicle M2AV." Journal of Atmospheric and Oceanic Technology, 25.11, 1969-1982, 2008.

[۲۶] Johansen, Tor A., et al. "On estimation of wind velocity, angle-of-attack and sideslip angle of small uavs using standard sensors." International Conference on Unmanned Aircraft Systems, 2015.

[۲۷] Aeronautics, Nextgen, and C. A. Torrance. "On-board wind speed estimation for uavs.", 2011.

[۲۸] Etkin, Bernard, and Lloyd Duff Reid**.** "Dynamics of flight: stability and control" Vol. 3. New York: Wiley, 1996.

[۲۹] Nelson, Robert C. "Flight stability and control." Int. Edition, 1998.

[۳۰] Miller, W., R. Sutton, and P. Werbos. "A Neural Network Baseline Problem for Control of Aircraft Flare and Touchdown" 403-425.

[۳۱] Arain, Bilal, and Farid Kendoul. "Real-time wind speed estimation and compensation for improved flight." Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on, 50.2, 1599-1606, 2014.

[۳۲] Evangelisti, E. editor., "Controllability and Observability", Lectures given at a Summer School of the Centro Internazionale Matematico Estivo (CIME) held in

Pontecchio (Bologna), Italy, July 1-9, 1968 (Vol. 46)“, Springer Science & Business Media, 2011.

[۳۳] Hautus, M., "Strong detectability and observers. Linear Algebra and its Applications", 50, 353–368, 1983.

[۳۴] Floquet, T. and Barbot, J.-P., "An observability form for linear systems with unknown inputs, International Journal of control, vol. 79, 2006, pp. 132–139.

[۳۵] Olbrot, A. W., "Observability and observers for a class of linear systems with delays", IEEE Transactions on Automatic Control, 26 (2), 513–517, 1981.

[۳۶] Zheng, G., "Observability Analysis and Observer Design for Complex Dynamical Systems", Doctoral dissertation, University Lille 1, 2015.

[۳۷] Costa, E.F. and Val, J.B.D., "On the observability and detectability of continuous-time Markov jump linear systems", SIAM Journal on Control and Optimization, 41(4), pp.1295-1314, 2002.

[۳۸] Bittanti, S., Colaneri, P. and Guardabassi, G., "H-controllability and observability of linear periodic systems", SIAM Journal on Control and Optimization, 22(6), pp.889-893, 1984.

[۳۹] Ammar, S., Massaoud, M. and Vivalda, J.C., "Genericity of the Strong Observability for Sampled Systems", SIAM Journal on Control and Optimization, 56(2), pp.1463-1490, 2018.

[۴۰] Roinodot’tenberg, Y.Y., "Observability of nonlinear systems", SIAM Journal on Control, 8(3), pp.338-345, 1970.

[۴۱] Van der Schaft, A.J., "Observability and controllability for smooth nonlinear systems", SIAM Journal on Control and Optimization, 20(3), pp.338-354, 1982.

[۴۲] Zhirabok, A. and Shumsky, A., "An approach to the analysis of observability and controllability in nonlinear systems via linear methods", International Journal of Applied Mathematics and Computer Science, 22(3), pp.507-522, 2012.

[۴۳] Vivalda, J.C., "On the genericity of the observability of uncontrolled discrete nonlinear systems", SIAM journal on control and optimization, 42(4), pp.1509-1522, 2003.

[۴۴] Hermann, R. and Krener, A., "Nonlinear controllability and observability", IEEE Transactions on automatic control, 22(5), pp.728-740, 1977.

[۴۵] Anguelova M, “Observability and identifiability of nonlinear systems with applications in biology“, Gothenburg, Sweden: Chalmers University of Technology, 2007.

[۴۶] Sobhani, M.H. and Poshtan, J., “Fault detection and isolation using unknown input observers with structured residual generation“, International Journal of Instrumentation and Control Systems, 2(2), pp.1-12, 2012.

[۴۷] Martinelli, A., “The Unicycle in Presence of a Single Disturbance: Observability Properties“, In 2017 Proceedings of the Conference on Control and its Applications, Society for Industrial and Applied Mathematics, pp. 62-69, 2017.

[۴۸] Basile, G. and Marro, G., “On the observability of linear, time-invariant systems with unknown inputs“, Journal of Optimization theory and applications, 3(6), pp.410-415, 1969.

[۴۹] Evangelisti, E. editor., “Controllability and Observability: Lectures given at a Summer School of the Centro Internazionale Matematico Estivo (CIME) held in Pontecchio (Bologna), Italy, July 1-9, 1968 (Vol. 46)“, Springer Science & Business Media, 2011.

[۵۰] Hautus, M., “Strong detectability and observers. Linear Algebra and its Applications“, 50, 353–368, 1983.

[۵۱] Martinelli, A., “Nonlinear Unknown Input Observability: Extension of the Observability Rank Condition“, IEEE Transactions on Automatic Control, 2018.

[۵۲] Patton, R., Clark, R., and Frank, P.M., “Fault diagnosis in dynamic systems: theory and applications“, Prentice-Hall international series in systems and control engineering, Prentice Hall, 1989.

[۵۳] Li, F., Zhao, G. and Huang, J., “Fast fault estimation for linear systems with unmatched faults. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers“, Part G: Journal of Aerospace Engineering, 230(3), pp.554-565, 2016.

[۵۴] Liu, C.S. and He, P., “Unknown input estimation for a class of nonlinear systems and its application to automotive engine controls“, In American Control Conference, ACC'09, pp. 1195-1200, 2009.

[۵۵] Barbot, J.P., Boutat, D. and Floquet, T., “An observation algorithm for nonlinear systems with unknown inputs“, Automatica, 45(8), pp.1970-1974, 2009.

[۵۶] Zhu, F., Xu, L., Zhang, W. and Fan, W., “State estimation with unknown input and measurement disturbance reconstruction based on descriptor systems. In Decision and Control (CDC), 2014 IEEE 53rd Annual Conference on, pp. 5524-5529, December, 2014.

[۵۷] Yong, S.Z., Zhu, M. and Frazzoli, E., December. Simultaneous input and state estimation for linear discrete-time stochastic systems with direct feedthrough. In Decision and Control (CDC), 2013 IEEE 52nd Annual Conference on, pp. 7034-7039, 2013.

[۵۸] Li, Baibing. “State estimation with partially observed inputs: A unified Kalman filtering approach“, Automatica 49, no. 3, pp. 816-820, 2013.

[۵۹] Yong, S.Z., Zhu, M. and Frazzoli, E., “A unified filter for simultaneous input and state estimation of linear discrete-time stochastic systems“, Automatica, 63, pp.321-329, 2016.

[۶۰] Y. Bar-Shalom, X. R. Li, and T. Kirubarajan, “Estimation with applications to tracking and navigation: theory algorithms and software,” John Wiley and Sons, 2004.

[۶۱] Ristic, B., Arulampalam, S., Gordon, N.; "Beyond the Kalman Filter", Artech House, London, 2004.

[۶۲] Bar-Shalom, Yaakov, X. Rong Li, and Thiagalingam Kirubarajan. "Estimation with applications to tracking and navigation: theory algorithms and software" John Wiley & Sons, Chapter11: Adaptive Estimation and Maneuvering Target, 2004.

[۶۳] Pitre, Ryan R., Vesselin P. Jilkov, and X. Rong Li. "A comparative study of multiple-model algorithms for maneuvering target tracking." Defense and Security. International Society for Optics and Photonics, 2005.

[۶۴] Mazor, Efim, et al. "Interacting multiple model methods in target tracking: a survey." Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on, 34.1, 103-123, 1998.

[۶۵] D. Alspach and H. Sorenson, “Nonlinear Bayesian estimation using Gaussian sum approximations”, IEEE Transactions on Automatic Control, V17, N4, pp439-448, 1972.

[۶۶] R. E. Kalman, “A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems,” Transaction of the ASME Journal Basic Engineering 82(Series D), 35–45, 1960.

[۶۷] C. Barrios, H. Himberg, Y. Motai, and A. Sadek, “Multiple Models of Extended Kalman Filtering for Predicting Vehicle Location“, 2006.

[۶۸] M. S. Djouadi, Y. Morsly, and D. Berkani, “A fuzzy IMM-UKF algorithm for highly maneuvering multi-target visual-based tracking“, in: Proceedings of the

Mediterranean Conference on Control and Automation, Greece, 2007.

[۶۹] B. Ristic, S. Arulampalam, N. Gordon, “Beyond the Kalman filter: particle filters for tracking applications“, Blaisdell Publishing Company. Artech House, London, 2004.

[۷۰] Y. Zhai, M.B. Yeary, S. Cheng, N. Kehtarnavaz, “An object-tracking algorithm based on multiple-model particle filtering with state partitioning“, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement 58, 1797–1809, 2009.

[۷۱] M. S. Arulampalam, S. Maskell, N. Gordon, T. Clapp, “A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking“ Journal of Statistical Computation and Simulation 50(1):1–23, 1997.

[۷۲] A. Doucet, N. J. Gordon, and V. Krishnamurthy, “Particle filters for state estimation of jump Markov linear systems“, IEEE Transactions on signal processing, 49.3, 613-624, 2001.

[۷۳] C. Andrieu, M. Davy, and A. Doucet, “Efficient particle filtering for jump Markov systems“, Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP), 2002 IEEE International Conference on. Vol. 2. IEEE, 2002.

[۷۴] R. Karlsson, and N. Bergman, “Auxiliary particle filters for tracking a maneuvering target“, In Decision and Control, Proceedings of the 39th IEEE Conference on, Vol. 4, pp. 3891-3895, IEEE, 2000.

[۷۵] Y. Boers, and J. N. Driessen, “Interacting multiple model particle filter“, IEE Proceedings-Radar, Sonar and Navigation, 150.5, 344-349, 2003.

[۷۶] Brayson, J., Ho, Y.; "Applied Optimal Control", Blaisdell Publishing Company, Waltham, Massachusetts, Toronto, London, 1969.

[۷۷] Zang W, Shi Z.G, Du S.c and Chen K.S., "Novel roughening method for reentry vehicle tracking using particle filter", Journal of Electromagnetic Waves and Applications, vol 21, no 14, pp. 1969-1981, 2007

[۷۸] Z. Chen, Y. Qu, Z. Xi, Y. Bo, B. Liu, and D. Kang, “A multiple model tracking algorithm based on an adaptive particle filter”, Asian Journal of Control, 18(5), pp.1877-1890, 2016.

[۷۹] P. H. Zipfel, “Modeling and Simulation of Aerospace Vehicle Dynamics,“ AIAA (American Institute of Aeronautics and Ast), ISBN: 1563478757 | 567, 2007.

[۸۰] M. R. Napolitano, Aircraft dynamics: From modeling to simulation. J. Wiley, 2012.

[۸۱] W. Frost, R.L. Bowles, Wind shear terms in the equations of aircraft motion, J.of Aircraft 21 866–872, 1984.

[۸۲] Fuller, J.R. “Evolution of airplane gust loads design requirements“, Journal of Aircraft, 32(2), 235–46, 1995.

[۸۳] Wright, Jan Robert, and Jonathan Edward Cooper., “Introduction to aircraft aeroelasticity and loads“. Vol. 20. John Wiley & Sons, 2008.

[۸۴] Schmidt, Louis V, “Introduction to Aircraft Flight Dynamics American Institute of Aeronautics and Astronautics,“ Inc., Reston, VA, 1998.

[۸۵] U.S. Military Handbook MIL-HDBK-1797B, 9 April 2012.

[۸۶] https://www.mathworks.com/help/aeroblks/discretewindgustmodel.html

[۸۷] R. Vepa, “Flight Dynamics, Simulation, and Control: For Rigid and Flexible Aircraft,“ CRC Press, August 2014.

[۸۸] Ted L. Lomax., “Structural loads analysis for commercial transport aircraft: theory and practice“, Aiaa, 1996.

[۸۹] Hoblit, Frederic M., “Gust loads on aircraft: concepts and applications“, Aiaa, 1988.

[۹۰] Ted L. Lomax., “Structural loads analysis for commercial transport aircraft: theory and practice“, Aiaa, 1996.

[۹۱] Dennis Baldocchi “Lecture 17 Wind and Turbulence Part 2 Surface Boundary Layer Theory and Principles notes,” University of California, Berkeley, October 5, 2012

[۹۲] J. Roskam, “Airplane flight dynamics and automatic flight controls,” DARcorporation, 1995.

[۹۳] D.D. Vicroy, “A simple, analytical, axisymmetric microburst model for downdraft estimation“, NASA Technical Memorandum 104053, 1991

[۹۴] Oseguera, Rosa M.; Bowles, Roland L, “A simple, analytic 3-dimensional downburst model based on boundry layer stagnation flow“, NASA TM-100632, July 1988.

[۹۵] D.D. Vicroy, “Microburst vertical wind estimation from horizontal wind measurements“, NASA Technical Paper 3460, 1994.

[۹۶] R. W. Beard, and T. W. McLain, “Small unmanned aircraft: Theory and practice“, Princeton university press, 2012.

[۹۷] Simon, Dan. “Optimal state estimation: Kalman, H infinity, and nonlinear approaches“. John Wiley & Sons, 2006.

[۹۸] S. Sundaram, “Fault-Tolerant and secure control systems“, Department of Electrical and Computer Engineering, University of Waterloo.

[۹۹] Glad, S. T., “General systems or. Extending linear theory to nonlinear systems“, Department of Electrical Engineering, Class Notes, pp. 11–18, Linköping University, 2012.

[۱۰۰] Zerz, Eva. “Introduction to Systems and Control Theory“, 2002.

[۱۰۱] Respondek, Witold, “Introduction to geometric nonlinear control; linearization, observability, decoupling“ No. INIS-XA—855, 2002.

[۱۰۲] Hedrick, J.K., Girard, A., “Control of nonlinear dynamic systems: theory and applications“, Class Notes, pp. 62–83, 2005.

[۱۰۳] Moreno, J.A., Rocha-Cózatl, E. and Wouwer, A.V., A dynamical interpretation of strong observability and detectability concepts for nonlinear systems with unknown inputs: application to biochemical processes. Bioprocess and biosystems engineering, 37(1), pp. 37-49, 2014.

[۱۰۴] H. S. Ju, and C. C. Tsai, "Longitudinal auto-landing controller design via adaptive backstepping," International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, 23(7), pp. 640-666, 2009.

[۱۰۵] W. Miller, R. Sutton, and P. Werbos, "A neural network baseline problem for control of aircraft flare and touchdown," pp. 403-425, 1990.

[۱۰۶] B. Ristic, S. Arulampalam, N. Gordon, "Beyond the Kalman filter: particle filters for tracking applications", Blaisdell Publishing Company. Artech House, London, 2004.

[۱۰۷] D. Simon, "Optimal state estimation: Kalman, H infinity, and nonlinear approaches," John Wiley and Sons, 2006.

[۱۰۸] S. J. Julier and J. K. Uhlmann, "A new extension of the Kalman Filter to nonlinear systems", AeroSense 11th International Symposium Aerospace Defense Sensing, Simulation and Controls:182–193, 1960.

[۱۰۹] S. H. Pourtakdoust, and H. Nobahari, "An extension of ant colony system to continuous optimization problems", Ant colony optimization and swarm intelligence, .p.p 158-173, 2004.

[۱۱۰] Jourdan, Damien B., et al. "Enhancing UAV survivability through damage tolerant control", AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, 2010.

[۱۱۱] Richards, Arthur, and Jonathan How. "Decentralized model predictive control of cooperating UAVs", Decision and Control, CDC. 43rd IEEE Conference on. Vol. 4. IEEE, 2004.

[۱۱۲] Stovner, Bård Bakken. "Model Predictive Control in UAV Trajectory Planning and Gimbal Control", 2014.

[۱۱۳] جعفری، نوید؛ کنترل پیش‌بین و غیرخطی هواپیما در حضور باد برشی مایکروبرست، پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد، دانشگاه صنعتی شریف، دانشکده مهندسی هوافضا، ۱۳۹۳.

[۱۱۴] Rawlings, James B. "Tutorial overview of model predictive control", Control Systems, IEEE 20, no. 3, 38-52, 2000.

[۱۱۵] Camacho, Eduardo F., and Carlos Bordons. "Model Based Predictive Controllers" In Model Predictive Control, pp. 13-31. Springer London, 1999.

[۱۱۶] Allgöwer, Frank, and Alex Zheng, eds. "Nonlinear model predictive control", Vol. 26. Birkhäuser, 2012.

[۱۱۷] Rouhani, Ramine, and Raman K. Mehra. "Model algorithmic control (MAC); basic theoretical properties", Automatica 18.4, 401-414, 1982.

[۱۱۸] Cutler, Charles R., and Brian L. Ramaker. "Dynamic matrix control: A computer control algorithm", joint automatic control conference. No. 17, 1980.

[۱۱۹] Clarke, David W., C. Mohtadi, and P. S. Tuffs. "Generalized predictive control-Part I. The basic algorithm", Automatica 23, no. 2, 137-148, 1987.

[۱۲۰] Haeri, Mohammad, and Hossein Zadehmorshed Beik. "Application of extended DMC for nonlinear MIMO systems", Computers & chemical engineering, 29, 9, 1867-1874, 2005

[۱۲۱] Morshedi, A. M., C. R. Cutler, and T. A. Skrovanek. "Optimal solution of dynamic matrix control with linear programing techniques (LDMC)", American Control Conference, IEEE, 1985.

[۱۲۲] Kuure-Kinsey, Matthew, and B. Wayne Bequette. "Multiple model predictive control: a state estimation based approach", American Control Conference, ACC'07. IEEE, 2007.

[۱۲۳] G.Sandou and S.Olaru, ''Ant Colony and Genetic Algorithm for Constrained Predictive Control of Power Systems'', 10th International Conference, Hybrid Systems: Computation and Control (HSCC), 4416, 501–514, 2007.

[۱۲۴] Sandou, Guillaume, and Sorin Olaru. ''Particle swarm optimization based nmpc: An application to district heating networks'', In Nonlinear Model Predictive Control, pp. 551-559. Springer Berlin Heidelberg, 2009.

[۱۲۵] Mercieca, Julian, and Simon G. Fabri. ''A metaheuristic particle swarm optimization approach to nonlinear model predictive control'', International Journal on Advances in Intelligent Systems, 5, 3 & 4, 2012.

[۱۲۶] Bououden, Sofiane, Mohammed Chadli, Fouad Allouani, and Salim Filali. ''A new approach for fuzzy predictive adaptive controller design using particle swarm optimization algorithm'', International Journal of Innovative Computing, Information and Control 9, no. 9, 3741-3758, 2013.

[۱۲۷] Xu, Fang, Hong Chen, Xun Gong, and Qin Mei. ''Fast nonlinear model predictive control on FPGA using particle swarm optimization'', IEEE Transactions on Industrial Electronics 63, no. 1, 310-321, 2016.

[۱۲۸] H.Merabti I. Bouchachi and K. Belarbi, ''Nonlinear Model Predictive Control of Quadcopter'', 16th International Conference on Sciences and Techniques of Automatic Control and Computer Engineering (STA), Pages 208 – 211, 2015.

[۱۲۹] Stahl, Dominik, and Jan Hauth. ''PF-MPC: Particle filter-model predictive control'', Systems & Control Letters 60, no. 8, 632-643, 2011.

[۱۳۰] Nobahari, Hadi, and Saeed Nasrollahi. ''A nonlinear estimation and control algorithm based on ant colony optimization'', In Evolutionary Computation (CEC), 2016 IEEE Congress on, pp. 5120-5127. IEEE, 2016.

[۱۳۱] Nobahari, Hadi, and Saeed Nasrollahi. ''A non-linear estimation and model predictive control algorithm based on ant colony optimization'', Transactions of the Institute of Measurement and Control, 41.4,1123-1138, 2019.

[۱۳۲] Nobahari, Hadi, and Saeed Nasrollahi. ''A terminal guidance algorithm based on ant colony optimization'', Computers & Electrical Engineering, 77, 128-146, 2019.

[۱۳۳] Allgöwer, Frank, and Alex Zheng. ''Nonlinear model predictive control, volume 26 of Progress in Systems and Control Theory'', chapter Modeling and Identification for Nonlinear Model Predictive Control: requirements, current status and future research needs, pages 269, 2000.

[۱۳۴] Farivar, F., & Shoorehdeli, M. A. "Stability analysis of particle dynamics in gravitational search optimization algorithm," Information Sciences, 337, 25-43, 2016.

[۱۳۵] Trelea, Ioan Cristian. “The particle swarm optimization algorithm: convergence analysis and parameter selection,” Information processing letters 85, no. 6, 317-325, 2003.

[۱۳۶] Dorf, Richard C., and Robert H. Bishop. “Modern control systems,” Pearson, 2011

[۱۳۷] L. Pollini, V. Parnenzini and M. Innocenti, “Distributed Real-Time Hardware-and Man-in-the-loop Simulation for the ICARO II Unmanned Systems Autopilot“, Latest Trends in Information Technology, ISBN: 978-1-61804-134-0.

[۱۳۸] هادی نوبهاری، و علیرضا شریفی، دستورالعمل آزمایشگاه سیستم‌های کنترل، دانشگاه صنعتی شریف، دانشکده مهندسی هوافضا، ویرایش سوم، تابستان ۱۳۹۵

[۱۳۹] Truong, Nguyen-Vu. “Hardware-in-the-loop approach to controller design and testing of motion control systems using xpc target“, Intelligent and Advanced Systems (ICIAS), 2012 4th International Conference on. Vol. 1. IEEE, 2012.

[۱۴۰] A. Kurniawan, “Getting Started with Matlab Simulink and Arduino“, PE Press, 2013.

[۱۴۱] Simulink® Desktop Real-Time User's Guide, MathWorks, Inc., 2015.

[۱۴۲] G. Gegic, “In-the-loop testing aids embedded system validation“, 2009.

[۱۴۳] H. Nobahari and A. R. Sharifi, “A novel heuristic filter based on ant colony optimization for non-linear systems state estimation, in: Computational Intelligence and Intelligent Systems“, Springer, pp. 20-29, 2012.

[۱۴۴] I. Fister, M. Perc, and S. M. Kamal, "A review of chaos-based firefly algorithms: perspectives and research challenges," Applied Mathematics and Computation, vol. 252, pp. 155-165, 2015.

[۱۴۵] D. Simon, Evolutionary optimization algorithms: John Wiley & Sons, 2013.

[۱۴۶] Simon, Daniel J. "From here to infinity" Embedded Systems Programming, 14.11, 20-32. 2001.

[۱۴۷] Poor, Vincent, and Douglas P. Looze. "Minimax state estimation for linear stochastic systems with noise uncertainty." Automatic Control, IEEE Transactions on, 26.4, 902-906, 1981.

[۱۴۸] Darragh, J. C., and D. P. Looze. "Noncausal minimax linear state estimation for systems with uncertain second order statistics." Decision and Control, 21st IEEE Conference on, IEEE, 1982.

[۱۴۹] Verdu, Sergio, and H. Vincent Poor. "Minimax linear observers and regulators for stochastic systems with uncertain second-order statistics" Automatic Control, IEEE Transactions on, 29.6, 499-511, 1984

[۱۵۰] Simon, Dan. "Optimal state estimation: Kalman, H infinity, and nonlinear approaches". John Wiley & Sons, 2006.

[۱۵۱] Simon, Dan. "A game theory approach to constrained minimax state estimation"

Signal Processing, IEEE Transactions on, 54.2, 405-412. 2006.

[۱۵۲] Grimble, M. J. "H_∞ design of optimal linear filters" Linear Circuits, Systems and Signal Processing: Theory and Applications, 533-540, 1988.

[۱۵۳] Grimble, Michael J., and Ahmed El Sayed. "Solution of the H_∞ optimal linear filtering problem for discrete-time systems" Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on, 38.7, 1092-1104, 1990.

[۱۵۴] Grimble, M. J., and M. A. Johnson. "H_∞ robust control design—a tutorial review." Computing & Control Engineering Journal, 2.6, 275-282, 1991.

[۱۵۵] Shaked, Uri, and Yahali Theodor. "H_∞-optimal estimation: A tutorial" Decision and Control, Proceedings of the 31st IEEE Conference on. IEEE, 1992.

[۱۵۶] Reif, Konrad, Frank Sonnemann, and Rolf Unbehauen. "Nonlinear state observation using H/sub/spl infin//-filtering Riccati design" Automatic Control, IEEE Transactions on, 44.1 , 203-208, 1999.

[۱۵۷] Bernstein, Dennis S., and Wassim M. Haddad. "Steady-state Kalman filtering with an H_∞ error bound." In American Control Conference, pp. 847-852. IEEE, 1989.

[۱۵۸] Hung, Y. S., & Yang, F. "Robust H_∞ filtering with error variance constraints for discrete time-varying systems with uncertainty" Automatica, 39(7), 1185-1194, 2003.

[۱۵۹] Simon, Dan. "A game theory approach to constrained minimax state estimation." Signal Processing, IEEE Transactions on, 54.2, 405-412, 2006.

[۱۶۰] Xu, Shengyuan, and Tongwen Chen. "Reduced-order H_∞ filtering for stochastic systems." Signal Processing, IEEE Transactions on, 50.12 , 2998-3007, 2002.

[۱۶۱] Grigoriadis, Karolos M., and James T. Watson. "Reduced-order H_∞ and L_2-L_∞ filtering via linear matrix inequalities." Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on, 33.4 , 1326-1338, 1997.

[۱۶۲] Xu, Shengyuan, and Tongwen Chen. "Reduced-order H_∞ filtering for stochastic systems." Signal Processing, IEEE Transactions on, 50.12, 2998-3007, 2002.

[۱۶۳] Ko, Sangho, and Robert R. Bitmead. "State estimation for linear systems with state equality constraints." Automatica 43.8, 1363-1368, 2007.

[۱۶۴] Grimble, Michael J. "H_∞ fixed-lag smoothing filter for scalar systems" Signal Processing, IEEE Transactions on, 39.9, 1955-1963, 1991.

[۱۶۵] Theodor, Y., and U. Shaked. "Game theory approach to H_∞-optimal discrete-time fixed-point and fixed-lag smoothing." Automatic Control, IEEE Transactions on 39.9, 1944-1948, 1994.

[۱۶۶] Zadeh, Lotfi A., and John R. Ragazzini. "An extension of Wiener's theory of prediction." Journal of Applied Physics, 21.7, 645-655, 1950.

[۱۶۷] Theodor, Y., Uri Shaked, and Carlos E. de Souza. "A game theory approach to robust discrete-time H_∞-estimation" Signal Processing, IEEE Transactions on 42.6, 1486-1495, 1994.

[۱۶۸] Stoorvogel, Antonie Arij, and Jan H. van Schuppen. "An H_∞-parameter estimator and its interpretation." Report-Department of Operations Research, Statistics, and System Theory 34, 1-6, 1994.

[۱۶۹] Tse, Johnson, Joseph Bentsman, and Norman Miller. "Minimax long range parameter estimation." Decision and Control, Proceedings of the 33rd IEEE Conference on, Vol. 1. IEEE, 1994.

[۱۷۰] Barbosa, Karina A., Carlos E. de Souza, and Alexandre Trofino. "Robust H_2filtering for uncertain linear systems: LMI based methods with parametric Lyapunov functions." Systems & Control Letters, 54.3 , 251-262, 2005.

[۱۷۱] B. Arain, and F. Kendoul, "Real-time wind speed estimation and compensation for improved flight," IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 50.2, 1599-1606, 2014.

[۱۷۲] K. O'Meara, "Advanced Topics in Linear Algebra: Weaving Matrix Problems through the Weyr Form: Weaving Matrix Problems through the Weyr Form", Oxford University Press, USA, 2011.

[۱۷۳] R. L. Burden, and J. D. Faires. "Numerical analysis (7th)", Prindle Weber and Schmidt, Boston, 2001.

[۱۷۴] Malik, Subhash Chandra, and Savita Arora. "Mathematical analysis. New Age International", 1992.

[۱۷۵] Caliò, Franca, and Alessandro Lazzari. " Elements of Mathematics with Numerical Applications". Società Editrice Esculapio, 2017.

[۱۷۶] L. Liang-Qun, J. Hong-Bing, L. Jun-Hui, The iterated extended Kalman particle filter, in: Communications and Information Technology, IEEE International Symposium on, Vol. 2, IEEE, pp. 1213-1216. 2005.

[۱۷۷] R. Van Der Merwe, A. Doucet, N. De Freitas, E. A. Wan, The unscented particle filter, in: Advances in neural information processing systems, pp. 584-590. 2001.

[۱۷۸] J. Zhong, Y.-f. Fung, M. Dai, A biologically inspired improvement strategy for particle filter: Ant colony optimization assisted particle filter, International Journal of Control, Automation and Systems 8, 3, p.p 519-526, 2010.

[۱۷۹] R. Roll, A mean/variance analysis of tracking error, The Journal of Portfolio Management 18, 4, p.p 13-22, 1992.

[۱۸۰] S. Bouabdallah, R. Siegwart, Full control of a quadrotor, in: Intelligent robots and systems, IEEE/RSJ international conference on, Ieee, pp. 153-158. 2007.

[۱۸۱] H. Nobahari, A. Sharifi, Continuous ant colony filter applied to online estimation and compensation of ground effect in automatic landing of quadrotor, Engineering Applications of Artificial Intelligence 32, p.p 100-111. 2014.

[۱۸۲] P. H. Zipfel, Modeling and simulation of aerospace vehicle dynamics, reston, va: American institute of aeronautics and astronautics, 2007.

[۱۸۳] حامد محمدکریمی، ناوبری تلفیقی توأم با شناسایی خطاهای اثر زمین در فرود خودکار پرنده بدون سرنشین با استفاده از فیلترهای ابتکاری، رساله دکتری، ۱۳۹۷

پیوست‌ها

پیوست الف: معرفی حسگرهای پرنده

در این پیوست، حسگرهای پرنده بدون سرنشین معرفی می‌شوند. همچنین، نحوه مدل‌سازی این حسگرها بیان می‌شود.

حسگر ژیروسکوپ نرخی: ژیروسکوپ‌های نرخی به‌منظور اندازه‌گیری نرخ‌های زاویه‌ای پرنده بدون‌سرنشین استفاده می‌شوند. به‌منظور مدل‌سازی، فرض می‌شود که بایاس‌های دورانی[۱۲۳] قبل از شروع الگوریتم تخمین باد تخمین زده شده و در نتیجه حذف می‌شوند. بنابراین، خروجی ژیروسکوپ‌های نرخی به‌صورت زیر مدل‌سازی می‌شوند:

$$\mathbf{z}_{\text{gyro}} = \begin{bmatrix} z_{\text{gyro},x} \\ z_{\text{gyro},y} \\ z_{\text{gyro},z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p+\nu_{\text{gyro},x} \\ q+\nu_{\text{gyro},y} \\ r+\nu_{\text{gyro},z} \end{bmatrix} \tag{پ-۱}$$

در رابطه فوق، $\nu_{\text{gyro},x}$، $\nu_{\text{gyro},y}$ و $\nu_{\text{gyro},z}$ به‌ترتیب بیانگر نویز سفید گوسی با میانگین صفر و واریانس‌های $\sigma^2_{\text{gyro},x}$، $\sigma^2_{\text{gyro},y}$ و $\sigma^2_{\text{gyro},z}$ هستند. همچنین، نرخ نمونه‌برداری ژیروسکوپ‌های نرخی برابر $T_s=0.01$ ثانیه انتخاب می‌شود. یک مثال از یک ژیروسکوپ نرخی MEMS مناسب برای این پروژه حسگر آنالوگ ADXRS450 با انحراف معیار $\sigma_{\text{gyro}} = 0.13$ درجه بر ثانیه است.

حسگر ارتفاع‌سنج: یک حسگر فشار مطلق به‌منظور اندازه‌گیری ارتفاع پرنده بالای ایستگاه زمینی استفاده می‌شود. خروجی حسگر فشار مطلق به‌صورت زیر مدل‌سازی می‌شود:

$$z_{\text{abs pres}} = (P_{\text{ground}} - P) + \beta_{\text{abs pres}} + \vartheta_{\text{abs pres}} \tag{پ-۲}$$

در رابطه فوق، P بیانگر فشار مطلق اندازه‌گیری‌شده توسط حسگر در طول پرواز است. همچنین، P_{ground} فشار اتمسفر اندازه‌گیری‌شده در ایستگاه زمینی قبل از برخاست پرنده است. اختلاف بین این دو ترم

[123] turn-to-turn biases

متناسب با ارتفاع پرنده بالای ایستگاه زمینی است. در نتیجه، خروجی حسگر فشار مطلق به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$z_{\text{abs pres}} = \rho g\left(h - h_{\text{ground}}\right) + \beta_{\text{abs pres}} + \vartheta_{\text{abs pres}} \qquad \text{(پ-۳)}$$

در رابطه فوق، h و h_{ground} به‌ترتیب بیانگر ارتفاع مطلق پرنده و ارتفاع مطلق ایستگاه زمینی نسبت به سطح دریا است. همچنین، $\beta_{\text{abs pres}}$ نشان‌دهنده بایاس مرتبط با دما و $\vartheta_{\text{abs pres}}$ بیانگر نویز گوسی با میانگین صفر و واریانس $\sigma^2_{\text{abs pres}}$ است. فرض می‌شود که بایاس حسگر توسط کالیبراسیون دقیق حذف می‌شود. همچنین، زمان نمونه‌برداری حسگر برابر با $T_s=0.01$ ثانیه انتخاب می‌شود. یک مثال از یک جسگر فشار مطلق حسگر Freescale Semiconductor MP3H6115A با انحراف معیار $\sigma_{\text{abs pres}} = 0.01$ kPa است.

حسگر قطب‌نما: یک حسگر قطب‌نما به‌منظور اندازه‌گیری زاویه سمت پرنده استفاده می‌شود. برای اهداف شبیه‌سازی، حسگر قطب نما به‌صورت زیر مدل‌سازی می‌شود:

$$z_{\text{mag}} = \psi + \beta_{\text{mag}} + \nu_{\text{mag}} \qquad \text{(پ-۴)}$$

در رابطه فوق، β_{mag} بیانگر بایاس اندازه‌گیری و ν_{mag} نشان‌دهنده نویز گوسی با میانگین صفر و واریانس σ^2_{mag} است. فرض می‌شود که ترم بایاس قبل از فرآیند تخمین باد تخمین‌زده‌شده و در نتیجه حذف می‌شوند. یک مثال از حسگر قطب‌نما دیجیتال برای کار جاری Honeywell HMR3300 با زمان نمونه‌برداری $T_{s,\text{compass}} = 0.125$ ثانیه و انحراف معیار $\sigma_{\text{mag}} = 0.3$ درجه است.

گیرنده سیستم موقعیت‌یاب جهانی: خطاهای ارتفاع، شرق و غرب از یک گیرنده موقعیت‌یاب جهانی (GPS) ناشی از یک بایاس ثابت با تغییرات کند به همراه نویز رندوم است. خروجی GPS به‌منظور شبیه‌سازی به‌صورت زیر مدل می‌شود:

$$\mathbf{z}_{\text{GPS}} = \begin{bmatrix} z_{\text{GPS},n} \\ z_{\text{GPS},e} \\ z_{\text{GPS},h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_n + \beta_{\text{GPS},n} + \nu_{\text{GPS},n} \\ p_e + \beta_{\text{GPS},e} + \nu_{\text{GPS},e} \\ -p_d + \beta_{\text{GPS},h} + \nu_{\text{GPS},h} \end{bmatrix} \qquad \text{(پ-۵)}$$

در رابطه فوق، $v_{\mathrm{GPS},n}$، $v_{\mathrm{GPS},e}$ و $v_{\mathrm{GPS},h}$ به‌ترتیب نویز سفید گوسی با میـانگین صـفر و واریـانس $\sigma^2_{\mathrm{GPS},n}$، $\sigma^2_{\mathrm{GPS},e}$ و $\sigma^2_{\mathrm{GPS},h}$ هستند. همچنین، $\beta_{\mathrm{GPS},n}$، $\beta_{\mathrm{GPS},e}$ و $\beta_{\mathrm{GPS},h}$ به‌ترتیب بیـانگر بایـاس شـمال، شـرق و غـرب است. مقادیر این پارامترها در جدول پ-۱ نشان داده شده‌است.

همچنین، با استفاده از اندازه‌گیری داپلر، سرعت زمینی با یک انحـراف معیـار در محـدوده 0.01 تـا 0.05 متر بر ثانیه اندازه‌گیری می‌شوند. لذا، خروجی سرعت به‌صورت زیر مدل می‌شود:

$$\mathbf{z}_{\mathrm{GPS}} = \begin{bmatrix} z_{\mathrm{GPS},v_n} \\ z_{\mathrm{GPS},v_e} \\ z_{\mathrm{GPS},v_d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_n + \beta_{\mathrm{GPS},v_n} + \nu_{\mathrm{GPS},v_n} \\ v_e + \beta_{\mathrm{GPS},v_e} + \nu_{\mathrm{GPS},v_e} \\ v_d + \beta_{\mathrm{GPS},v_d} + \nu_{\mathrm{GPS},v_d} \end{bmatrix} \tag{پ-۶}$$

در رابطه فوق، ν_{GPS,v_n}، ν_{GPS,v_e} و ν_{GPS,v_d} به‌ترتیب بیانگر نویز گوسی با میانگین صفر و واریـانس $\sigma^2_{v_n}$، $\sigma^2_{v_e}$ و $\sigma^2_{v_d}$ هستند. زمان نمونه‌برداری از گیرنده GPS به‌صورت $T_{s,\mathrm{GPS}} = 0.5$ ثانیه فرض می‌شود.

جدول پ-۱ پارامترهای مدل خطای گیرنده GPS

اندازه‌گیری	بایاس (متر)	انحراف معیار (متر)
عرض جغرافیایی	۴/۷	۰/۴
طول جغرافیایی	۴/۷	۰/۴
ارتفاع	۹/۲	۰/۷

پیوست ب: مشتقات آیرودینامیکی وکنترلی پرنده

جدول پ-۲ مشتقات آیرودینامیک وکنترل کانال طولی

$\mathrm{X}_u = \frac{\rho \mathrm{S}(u-u_w)}{\mathrm{m}}\left[C_{\mathrm{X}_0} + C_{\mathrm{X}_\alpha}\alpha + C_{\mathrm{X}_{\delta_e}}\delta_\mathrm{e}\right] - \frac{\rho \mathrm{S} C_{\mathrm{X}_\alpha} V_\mathrm{a}^2 (w-w_w)}{2\mathrm{m}\left[(u-u_w)^2+(w-w_w)^2\right]} + \frac{\rho \mathrm{S}\bar{\mathrm{c}} C_{\mathrm{X}_q}}{4\mathrm{m}V_\mathrm{a}}(u-u_w)(q-q_w)$
$\mathrm{X}_v = r + \frac{\rho \mathrm{S}(v-v_w)}{\mathrm{m}}\left[C_{\mathrm{X}_0} + C_{\mathrm{X}_\alpha}\alpha + C_{\mathrm{X}_{\delta_e}}\delta_\mathrm{e}\right] + \frac{\rho \mathrm{S}\bar{\mathrm{c}} C_{\mathrm{X}_q}}{4\mathrm{m}V_\mathrm{a}}(v-v_w)(q-q_w)$
$\mathrm{X}_w = -q + \frac{\rho \mathrm{S}(w-w_w)}{\mathrm{m}}\left[C_{\mathrm{X}_0} + C_{\mathrm{X}_\alpha}\alpha + C_{\mathrm{X}_{\delta_e}}\delta_\mathrm{e}\right] + \frac{\rho \mathrm{S} C_{\mathrm{X}_\alpha} V_\mathrm{a}^2 (u-u_w)}{2\mathrm{m}\left[(u-u_w)^2+(w-w_w)^2\right]} + \frac{\rho \mathrm{S}\bar{\mathrm{c}} C_{\mathrm{X}_q}}{4\mathrm{m}V_\mathrm{a}}(w-w_w)(q-q_w)$
$\mathrm{X}_q = -w + \frac{\rho \mathrm{S}\bar{\mathrm{c}} V_\mathrm{a} C_{\mathrm{X}_q}}{4\mathrm{m}}$
$\mathrm{X}_r = v$
$\mathrm{X}_\theta = -\mathrm{g}\cos\theta$
$\mathrm{X}_{\delta_e} = \frac{\rho \mathrm{S}\, V_\mathrm{a}^2\, C_{\mathrm{X}_{\delta_e}}}{2\mathrm{m}}$
$\mathrm{X}_{\delta_t} = \mathbf{T}/\mathrm{m}$
$\mathrm{Z}_u = q + \frac{\rho \mathrm{S}(u-u_w)}{\mathrm{m}}\left[C_{\mathrm{Z}_0} + C_{\mathrm{Z}_\alpha}\alpha + C_{\mathrm{Z}_{\delta_e}}\delta_\mathrm{e}\right] - \frac{\rho \mathrm{S} C_{\mathrm{Z}_\alpha} V_\mathrm{a}^2 (w-w_w)}{2\mathrm{m}\left[(u-u_w)^2+(w-w_w)^2\right]} + \frac{\rho \mathrm{S}\bar{\mathrm{c}} C_{\mathrm{Z}_q}}{4\mathrm{m}V_\mathrm{a}}(u-u_w)(q-q_w)$
$\mathrm{Z}_v = -p + \frac{\rho \mathrm{S}(v-v_w)}{\mathrm{m}}\left[C_{\mathrm{Z}_0} + C_{\mathrm{Z}_\alpha}\alpha + C_{\mathrm{Z}_{\delta_e}}\delta_\mathrm{e}\right] + \frac{\rho \mathrm{S}\bar{\mathrm{c}} C_{\mathrm{Z}_q}}{4\mathrm{m}V_\mathrm{a}}(v-v_w)(q-q_w)$
$\mathrm{Z}_w = \frac{\rho \mathrm{S}(w-w_w)}{\mathrm{m}}\left[C_{\mathrm{Z}_0} + C_{\mathrm{Z}_\alpha}\alpha + C_{\mathrm{Z}_{\delta_e}}\delta_\mathrm{e}\right] + \frac{\rho \mathrm{S} C_{\mathrm{Z}_\alpha} V_\mathrm{a}^2 (u-u_w)}{2\mathrm{m}\left[(u-u_w)^2+(w-w_w)^2\right]} + \frac{\rho \mathrm{S}\bar{\mathrm{c}} C_{\mathrm{Z}_q}}{4\mathrm{m}V_\mathrm{a}}(w-w_w)(q-q_w)$
$\mathrm{Z}_p = -v$
$\mathrm{Z}_q = u + \frac{\rho \mathrm{S}\bar{\mathrm{c}} V_\mathrm{a} C_{\mathrm{Z}_q}}{4\mathrm{m}}$
$\mathrm{Z}_\phi = -\mathrm{g}\sin\phi\cos\theta$
$\mathrm{Z}_\theta = -\mathrm{g}\cos\phi\sin\theta$
$\mathrm{Z}_{\delta_e} = \frac{\rho \mathrm{S} V_\mathrm{a}^2\, C_{\mathrm{Z}_{\delta_e}}}{2\mathrm{m}}$

$\mathrm{M}_u=\frac{\rho \mathrm{S}(u-u_w)}{\mathrm{J_{yy}}}\left[C_{\mathrm{m_0}}+C_{\mathrm{m}_\alpha}\alpha+C_{\mathrm{m}_{\delta_e}}\delta_{\mathrm{e}}\right]-\frac{\rho \mathrm{S}\bar{\mathrm{c}}C_{\mathrm{m}_\alpha}V_{\mathrm{a}}^2(w-w_w)}{2\mathrm{J_{yy}}\left[(u-u_w)^2+(w-w_w)^2\right]}+\frac{\rho \mathrm{S}\bar{\mathrm{c}}^2C_{\mathrm{m}_q}}{4\mathrm{J_{yy}}V_{\mathrm{a}}}(u-u_w)(q-q_w)$
$\mathrm{M}_v=\frac{\rho \mathrm{S}(v-v_w)}{\mathrm{J_{yy}}}\left[C_{\mathrm{m_0}}+C_{\mathrm{m}_\alpha}\alpha+C_{\mathrm{m}_{\delta_e}}\delta_{\mathrm{e}}\right]+\frac{\rho \mathrm{S}\bar{\mathrm{c}}^2C_{\mathrm{m}_q}}{4\mathrm{J_{yy}}V_{\mathrm{a}}}(v-v_w)(q-q_w)$
$\mathrm{M}_w=\frac{\rho \mathrm{S}(w-w_w)}{\mathrm{J_{yy}}}\left[C_{\mathrm{m_0}}+C_{\mathrm{m}_\alpha}\alpha+C_{\mathrm{m}_{\delta_e}}\delta_{\mathrm{e}}\right]+\frac{\rho \mathrm{S}\bar{\mathrm{c}}C_{\mathrm{m}_\alpha}V_{\mathrm{a}}^2(u-u_w)}{2\mathrm{J_{yy}}\left[(u-u_w)^2+(w-w_w)^2\right]}+\frac{\rho \mathrm{S}\bar{\mathrm{c}}^2C_{\mathrm{m}_q}}{4\mathrm{J_{yy}}V_{\mathrm{a}}}(w-w_w)(q-q_w)$
$\mathrm{M}_p=\Gamma_5 r-2\Gamma_6\, p$
$\mathrm{M}_q=\frac{\rho \mathrm{S}\bar{\mathrm{c}}^2V_{\mathrm{a}}C_{\mathrm{m}_q}}{4\mathrm{J_{yy}}}$
$\mathrm{M}_r=\Gamma_5 p+2\Gamma_6\, r$
$\mathrm{M}_{\delta_e}=\frac{\rho \mathrm{S}\;\bar{\mathrm{c}}V_{\mathrm{a}}^2\,C_{\mathrm{m}_{\delta_e}}}{2\;\mathrm{J_{yy}}}$
$\Theta_q=\cos\phi$
$\Theta_r=-\sin\phi$
$\Theta_\phi=-q\sin\phi-r\cos\phi$
$\mathrm{H}_u=\sin\theta$
$\mathrm{H}_v=-\sin\phi\cos\theta$
$\mathrm{H}_w=-\cos\phi\cos\theta$
$\mathrm{H}_\phi=-v\cos\phi\cos\theta+w\sin\phi\cos\theta$
$\mathrm{H}_\theta=u\cos\theta+\sin\theta(v\sin\phi+w\cos\phi)$
$\mathrm{P}_{n_u}=\cos\theta\cos\psi$
$\mathrm{P}_{n_v}=\sin\phi\sin\theta\cos\psi-\cos\phi\sin\psi$
$\mathrm{P}_{n_w}=\cos\phi\sin\theta\cos\psi+\sin\phi\sin\psi$
$\mathrm{P}_{\mathrm{n}_\phi}=(\cos\phi\sin\theta\cos\psi+\sin\phi\sin\psi)v+(\cos\phi\sin\psi-\sin\phi\,\sin\theta\cos\psi)w$
$\mathrm{P}_{\mathrm{n}_\theta}=-\sin\theta\cos\psi u+\sin\phi\cos\theta\cos\psi v+\cos\phi\cos\theta\cos\psi w$
$\mathrm{P}_{\mathrm{n}_\psi}=-\cos\theta\sin\psi u+(\sin\phi\sin\theta\sin\psi+\cos\phi\,\cos\psi)v+(-\cos\phi\sin\theta\sin\psi+\sin\phi\cos\psi)w$

جدول پ-۳ مشتقات آیرودینامیک کانال عرضی

$\mathrm{Y}_u=-r+\frac{\rho \mathrm{Sb}(u-u_w)}{4\mathrm{m}\,\mathrm{V_a}}\left[C_{\mathrm{y}_p}(p-p_w)+C_{\mathrm{y}_r}(r-r_w)\right]+\frac{\rho \mathrm{S}(u-u_w)}{\mathrm{m}}\left[C_{\mathrm{y_0}}+C_{\mathrm{y}_\beta}\beta+C_{\mathrm{y}_{\delta_a}}\delta_{\mathrm{a}}+C_{\mathrm{y}_{\delta_r}}\delta_r\right]$ $-\frac{\rho \mathrm{S}C_{\mathrm{y}_\beta}}{2\mathrm{m}}\frac{(u-u_w)(v-v_w)}{\sqrt{(u-u_w)^2+(w-w_w)^2}}$

$\mathrm{Y}_v=\frac{\rho \mathrm{Sb}(v-v_w)}{4\mathrm{m\,V_a}}\left[C_{\mathrm{y}_p}(p-p_w)+C_{\mathrm{y}_r}(r-r_w)\right]+\frac{\rho \mathrm{S}(v-v_w)}{\mathrm{m}}\left[C_{\mathrm{y}_0}+C_{\mathrm{y}_\beta}\beta+C_{\mathrm{y}_{\delta_\mathrm{a}}}\delta_\mathrm{a}+C_{\mathrm{y}_{\delta_\mathrm{r}}}\delta_r\right]$ $+\frac{\rho \mathrm{S} C_{\mathrm{y}_\beta}}{2\mathrm{m}}\sqrt{(u-u_w)^2+(w-w_w)^2}$
$\mathrm{Y}_w=p+\frac{\rho \mathrm{Sb}(w-w_w)}{4\mathrm{m\,V_a}}\left[C_{\mathrm{y}_p}(p-p_w)+C_{\mathrm{y}_r}(r-r_w)\right]+\frac{\rho \mathrm{Sb}(w-w_w)}{\mathrm{m}}\left[C_{\mathrm{y}_0}+C_{\mathrm{y}_\beta}\beta+C_{\mathrm{y}_{\delta_\mathrm{a}}}\delta_\mathrm{a}+C_{\mathrm{y}_{\delta_\mathrm{r}}}\delta_r\right]$ $-\frac{\rho \mathrm{S} C_{\mathrm{y}_\beta}}{2\mathrm{m}}\frac{(v-v_w)(w-w_w)}{\sqrt{(u-u_w)^2+(w-w_w)^2}}$
$\mathrm{Y}_p=\frac{\rho\,\mathrm{V_a\,Sb}}{4\mathrm{m}}C_{\mathrm{y}_p}+w$
$\mathrm{Y}_r=\frac{\rho\,\mathrm{V_a\,Sb}}{4\mathrm{m}}C_{\mathrm{y}_r}-u$
$\mathrm{Y}_\phi=g\cos\theta\,\cos\phi$
$\mathrm{Y}_\theta=-g\sin\theta\,\sin\phi$
$\mathrm{Y}_{\delta_\mathrm{a}}=\frac{\rho\,\mathrm{V_a}^2\,\mathrm{S}}{2\mathrm{m}}C_{\mathrm{y}_{\delta_\mathrm{a}}}$
$\mathrm{Y}_{\delta_r}=\frac{\rho\,\mathrm{V_a}^2\,\mathrm{S}}{2\mathrm{m}}C_{\mathrm{y}_{\delta_\mathrm{r}}}$
$\mathrm{L}_u=\frac{\rho \mathrm{Sb}^2(u-u_w)}{4\mathrm{V_a}}\left[C_{p_p}(p-p_w)+C_{p_r}(r-r_w)\right]+\rho\mathrm{S\,b}(u-u_w)\left[C_{p_0}+C_{p_\beta}\beta+C_{p_{\delta_\mathrm{a}}}\delta_\mathrm{a}+C_{p_{\delta_\mathrm{r}}}\delta_r\right]$ $-\frac{\rho \mathrm{Sb} C_{p_\beta}}{2}\frac{(u-u_w)(v-v_w)}{\sqrt{(u-u_w)^2+(w-w_w)^2}}$
$\mathrm{L}_v=\frac{\rho \mathrm{Sb}^2(v-v_w)}{4\mathrm{V_a}}\left[C_{p_p}(p-p_w)+C_{p_r}(r-r_w)\right]+\rho\mathrm{S\,b}(v-v_w)\left[C_{p_0}+C_{p_\beta}\beta+C_{p_{\delta_\mathrm{a}}}\delta_\mathrm{a}+C_{p_{\delta_\mathrm{r}}}\delta_r\right]$ $+\frac{\rho \mathrm{Sb} C_{p_\beta}}{2}\sqrt{(u-u_w)^2+(w-w_w)^2}$
$\mathrm{L}_w=\frac{\rho \mathrm{Sb}^2(w-w_w)}{4\mathrm{V_a}}\left[C_{p_p}(p-p_w)+C_{p_r}(r-r_w)\right]+\rho\mathrm{S\,b}(w-w_w)\left[C_{p_0}+C_{p_\beta}\beta+C_{p_{\delta_\mathrm{a}}}\delta_\mathrm{a}+C_{p_{\delta_\mathrm{r}}}\delta_r\right]$ $-\frac{\rho \mathrm{Sb} C_{p_\beta}}{2}\frac{(w-w_w)(v-v_w)}{\sqrt{(u-u_w)^2+(w-w_w)^2}}$
$\mathrm{L}_p=\Gamma_1 q+\frac{\rho\,\mathrm{V_a\,Sb}^2}{4}C_{p_p}$
$\mathrm{L}_q=\Gamma_1 p-\Gamma_2 r$
$\mathrm{L}_r=-\Gamma_2 q+\frac{\rho\,\mathrm{V_a\,Sb}^2}{4}C_{p_r}$

$\mathrm{L}_{\delta_\mathrm{a}} = \dfrac{\rho \mathrm{V_a}^2 \mathrm{Sb}}{2} C_{p_{\delta_\mathrm{a}}}$
$\mathrm{L}_{\delta_r} = \dfrac{\rho \mathrm{V_a}^2 \mathrm{Sb}}{2} C_{p_{\delta_r}}$
$\mathrm{N}_u = \dfrac{\rho \mathrm{Sb}^2 (u-u_w)}{4\mathrm{V_a}} \left[C_{r_p}(p-p_w) + C_{r_r}(r-r_w)\right] + \rho \mathrm{Sb}(u-u_w)\left[C_{r_0} + C_{r_\beta}\beta + C_{r_{\delta_\mathrm{a}}}\delta_\mathrm{a} + C_{r_{\delta_r}}\delta_r\right] - \dfrac{\rho \mathrm{Sb} C_{r_\beta}}{2} \dfrac{(u-u_w)(v-v_w)}{\sqrt{(u-u_w)^2 + (w-w_w)^2}}$
$\mathrm{N}_v = \dfrac{\rho \mathrm{Sb}^2 (v-v_w)}{4\mathrm{V_a}} \left[C_{r_p}(p-p_w) + C_{r_r}(r-r_w)\right] + \rho \mathrm{Sb}(v-v_w)\left[C_{r_0} + C_{r_\beta}\beta + C_{r_{\delta_\mathrm{a}}}\delta_\mathrm{a} + C_{r_{\delta_r}}\delta_r\right] + \dfrac{\rho \mathrm{Sb} C_{r_\beta}}{2} \sqrt{(u-u_w)^2 + (w-w_w)^2}$
$\mathrm{N}_w = \dfrac{\rho \mathrm{Sb}^2 (w-w_w)}{4\mathrm{V_a}} \left[C_{r_p}(p-p_w) + C_{r_r}(r-r_w)\right] + \rho \mathrm{Sb}(w-w_w)\left[C_{r_0} + C_{r_\beta}\beta + C_{r_{\delta_\mathrm{a}}}\delta_\mathrm{a} + C_{r_{\delta_r}}\delta_r\right] - \dfrac{\rho \mathrm{Sb} C_{r_\beta}}{2} \dfrac{(w-w_w)(v-v_w)}{\sqrt{(u-u_w)^2 + (w-w_w)^2}}$
$\mathrm{N}_p = -\Gamma_7 q + \dfrac{\rho \mathrm{V_a} \mathrm{Sb}^2}{4} C_{r_p}$
$\mathrm{N}_q = \Gamma_7 p - \Gamma_1 r$
$\mathrm{N}_r = -\Gamma_1 q + \dfrac{\rho \mathrm{V_a} \mathrm{Sb}^2}{4} C_{r_r}$
$\mathrm{N}_{\delta_\mathrm{a}} = \dfrac{\rho \mathrm{V_a}^2 \mathrm{Sb}}{2} C_{r_{\delta_\mathrm{a}}}$
$\mathrm{N}_{\delta_r} = \dfrac{\rho \mathrm{V_a}^2 \mathrm{Sb}}{2} C_{r_{\delta_r}}$
$\Phi_q = \sin\phi \tan\theta$
$\Phi_r = \cos\phi \tan\theta$
$\Phi_\phi = \tan\theta (q\cos\phi - r\sin\phi)$
$\Phi_\theta = (\sec\theta)^2 (q\sin\phi + r\cos\phi)$
$\Psi_q = \sin\phi \sec\theta$
$\Psi_r = \cos\phi \sec\theta$
$\Psi_\phi = \sec\theta (q\cos\phi - r\sin\phi)$
$\Psi_\theta = \sec\theta \tan\theta (q\sin\phi + r\cos\phi)$
$\mathrm{P}_{e_u} = \cos\theta \sin\psi$

$P_{e_v} = \sin\phi\sin\theta\sin\psi + \cos\phi\cos\psi$
$P_{e_w} = \cos\phi\sin\theta\sin\psi - \sin\phi\cos\psi$
$P_{e_\phi} = \left(\cos\phi\sin\theta\sin\psi - \sin\phi\cos\psi\right)v - \left(\sin\phi\sin\theta\sin\psi + \cos\phi\ \cos\psi\right)w$
$P_{e_\theta} = -\sin\theta\sin\psi u + \sin\phi\cos\theta\sin\psi v + \cos\phi\cos\theta\sin\psi w$
$P_{e_\psi} = \cos\theta\cos\psi u + \left(\sin\phi\sin\theta\cos\psi - \cos\phi\ \sin\psi\right)v + \left(\cos\phi\sin\theta\cos\psi + \sin\phi\sin\psi\right)w$

پیوست پ: پارامترهای پرنده

پارامترهای اینرسی، هندسی و آیرودینامیکی پرنده بدون سرنشین بال‌ثابت در جدول پ-۴ بیان شده‌است. به‌این‌منظور، فرض می‌شود که پرنده در شرایط تریم، در ارتفاع ۱۰۰ متر و با سرعت هوا ۳۵ متر بر ثانیه پرواز می‌کند. از این رو، مقادیر مشتقات پایداری بعددار کانال طولی و عرضی پرنده به ترتیب در جدول پ-۵ و جدول پ-۶ بیان شده‌است [۱۸۳]. همچنین، ویژگی‌های تصادفی نویز اندازه‌گیری سنسورها در جدول پ-۷ نشان داده شده‌است و نرخ نمونه‌برداری سنسورها ۱۰۰ هرتز فرض می‌شود.

جدول پ-۴ پارامترهای پرنده

پارامتر	واحد	مقدار	پارامتر	واحد	مقدار	پارامتر	واحد	مقدار
M	kg	15	C_{m_α}	-	-1.1402	C_{Y_p}	-	0.0033988
S	m^2	1.125	C_{L_q}	-	3.8938	C_{l_p}	-	-0.53251
$\bar{c}$	m	0.375	C_{D_q}	-	0	C_{n_p}	-	-0.001229
B	m	3	C_{m_q}	-	-25.267	C_{Y_r}	-	0
J_{xx}	$Kg.m^2$	0.79	$C_{L_{\delta_e}}$	-	0.90527	C_{l_r}	-	0.027456
J_{yy}	$Kg.m^2$	1.76	$C_{D_{\delta_e}}$	-	0.0038961	C_{n_r}	-	-0.0016988
J_{zz}	$Kg.m^2$	2.53	$C_{m_{\delta_e}}$	-	1.8381	$C_{Y_{\delta_a}}$	-	0
J_{xz}	$Kg.m^2$	0.1	C_{Y_0}	-	0	$C_{l_{\delta_a}}$	-	0.14779
C_{L_0}	-	0.123	C_{l_0}	-	0	$C_{n_{\delta_a}}$	-	-0.0013373
C_{D_0}	-	0.047	C_{n_0}	-	0	$C_{Y_{\delta_r}}$	-	0.53858
C_{m_0}	-	0.0089	C_{Y_β}	-	-0.49206	$C_{l_{\delta_r}}$	-	0
C_{L_α}	-	6.8755	C_{l_β}	-	0.036211	$C_{n_{\delta_r}}$	-	-0.016988
C_{D_α}	-	0.17189	C_{n_β}	-	0.036211			

جدول پ-۵ مشتقات پایداری بعددار کانال طولی پرنده

پارامتر	واحد	مقدار	پارامتر	واحد	مقدار	پارامتر	واحد	مقدار
X_u	1/sec	-0.1345	Z_u	1/sec	-0.3519	M_u	rad/m/sec	0.0814
X_v	1/sec	0	Z_v	1/sec	0	M_v	rad/m/sec	0
X_w	1/sec	-0.0699	Z_w	1/sec	-9.9035	M_w	rad/m/sec	-5.2133
X_q	m/rad/sec	0	Z_p	m/rad/sec	0	M_p	1/sec	0
X_r	m/rad/sec	0	Z_q	m/rad/sec	33.9555	M_q	1/sec	-21.6616
X_θ	m/rad/sec^2	-9.79	Z_ϕ	m/rad/sec^2	0	M_r	1/sec	0
X_{δ_e}	m/rad/sec^2	-0.1951	Z_θ	m/rad/sec^2	0	M_{δ_e}	1/sec^2	294.1527
X_{δ_t}	m/rad/sec^2	3.33	Z_{δ_e}	m/rad/sec^2	-45.3268	P_{n_u}	-	1
Θ_q	-	1	H_u	-	0	P_{n_v}	-	0
Θ_r	-	0	H_v	-	0	P_{n_w}	-	0
Θ_ϕ	1/sec	0	H_w	-	1	P_{n_ϕ}	m/rad	0
			H_ϕ	m/rad	0	P_{n_θ}	m/rad	0
			H_θ	m/rad	-35	P_{n_ψ}	m/rad	0

جدول پ-۶ مشتقات پایداری بعددار کانال عرضی پرنده

پارامتر	واحد	مقدار	پارامتر	واحد	مقدار	پارامتر	واحد	مقدار
Y_u	1/sec	0	L_u	rad/m/sec	0	N_u	rad/m/sec	0
Y_v	1/sec	0-0.704	L_v	rad/m/sec	-3.5895	N_v	rad/m/sec	0.7795
Y_w	1/sec	0	L_w	rad/m/sec	0	N_w	rad/m/sec	0
Y_p	m/rad/sec	0.0073	L_p	1/sec	-65.4257	N_p	1/sec	-2.6329
Y_r	m/rad/sec	-35	L_q	1/sec	0	N_q	1/sec	0
Y_ϕ	m/rad/sec^2	9.79	L_r	1/sec	3.2905	N_r	1/sec	-0.5184
Y_θ	m/rad/sec^2	0	L_{δ_a}	1/sec^2	423.494	N_{δ_a}	1/sec^2	15.5479
Y_{δ_a}	m/rad/sec^2	0	L_{δ_r}	1/sec^2	132.4303	N_{δ_r}	1/sec^2	-63.2711
Y_{δ_r}	m/rad/sec^2	-26.9677	Ψ_q	-	0	P_{e_u}	-	0

پارامتر	واحد	مقدار	پارامتر	واحد	مقدار	پارامتر	واحد	مقدار
Φ_q	-	0	Ψ_r	-	1	P_{e_v}	-	1
Φ_r	-	0	Ψ_ϕ	1/sec	1	P_{e_w}	-	0
Φ_ϕ	1/sec	0	Ψ_θ	1/sec	0	P_{e_ϕ}	m/rad	0
Φ_θ	1/sec	0	P_{e_θ}	m/rad	0	P_{e_ψ}	m/rad	35

جدول پ-۷ انحراف معیار نویز اندازه‌گیری

متغیر اندازه‌گیری	انحراف معیار	واحد	متغیر اندازه‌گیری	انحراف معیار	واحد	متغیر اندازه‌گیری	انحراف معیار	واحد
p_{n_m}	۰/۲۱	m	p_{e_m}	۰/۲۱	m	h_m	۰/۴	m
$\dot{p}_{n_m}$	۰/۰۱	m/s	$\dot{p}_{e_m}$	۰/۰۱	m/s	$\dot{p}_{d_m}$	۰/۰۱	m/s
p_m	۰/۱۳	deg/s	q_m	۰/۱۳	deg/s	r_m	۰/۱۳	deg/s
ψ_m	۰/۱۳	deg						

پیوست ت: اثبات قضایای مشاهده‌پذیری برای سیستم‌های خطی پیوسته زمان

اثبات قضیه ۲ (مشاهده‌پذیری قوی): در این بخش اثبات قضیه ۲ مرتبط بـا شـرایط مشـاهده‌پذیری قوی برای یک سیستم خطی پیوسته زمان بیان می‌شود [۹۸].

شرط لازم: خروجی سیستم و مشتقات آن تا مرتبه i-ام به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{cases} \mathbf{z} = \mathbf{C}\,\mathbf{x} + \mathbf{D}\,\boldsymbol{\delta} + \mathbf{D_d}\,\mathbf{d} \\ \mathbf{z}^{(1)} = \mathbf{C}\,\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{D}\,\boldsymbol{\delta}^{(1)} + \mathbf{D}_{\mathrm{d}}\,\mathbf{d}^{(1)} = \mathbf{CA}\,\mathbf{x} + \mathbf{CB}\,\boldsymbol{\delta} + \mathbf{CB}\,\mathbf{d} + \mathbf{D}\,\boldsymbol{\delta}^{(1)} + \mathbf{D}_{\mathrm{d}}\,\mathbf{d}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{z}^{(\mathrm{n}-1)} = \mathbf{CA}^{\mathrm{n}-1}\mathbf{x} + \mathbf{CA}^{\mathrm{n}-2}\mathbf{B}\,\boldsymbol{\delta} + \cdots + \mathbf{D}\,\boldsymbol{\delta}^{(\mathrm{n}-1)} + \mathbf{CA}^{\mathrm{n}-2}\mathbf{B}\,\mathbf{d} + \cdots + \mathbf{D}_{\mathrm{d}}\,\mathbf{d}^{(\mathrm{n}-1)} \\ \vdots \\ \mathbf{z}^{(i)} = \mathbf{CA}^{i}\,\mathbf{x} + \mathbf{CA}^{i-1}\mathbf{B}\,\boldsymbol{\delta} + \cdots + \mathbf{D}\,\boldsymbol{\delta}^{(i)} + \mathbf{CA}^{i-1}\mathbf{B}\,\mathbf{d} + \cdots + \mathbf{D}_{\mathrm{d}}\,\mathbf{d}^{(i)} \end{cases} \quad \text{(پ-۷)}$$

معادله فوق می‌تواند به فرم ماتریسی زیر بیان شود:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{z}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{z}^{(\mathrm{n}-1)} \\ \vdots \\ \mathbf{z}^{(i)} \end{bmatrix} = \mathbf{O}_i\,\mathbf{x} + \mathbf{W}_i \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta} \\ \boldsymbol{\delta}^{(1)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\delta}^{(\mathrm{n}-1)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\delta}^{(i)} \end{bmatrix} + \mathbf{W}_{\mathbf{d}_i} \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{d}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{d}^{(\mathrm{n}-1)} \\ \vdots \\ \mathbf{d}^{(i)} \end{bmatrix} \quad \text{(پ-۸)}$$

جاییکه؛

$$\mathbf{O}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{\mathrm{n}-1} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{i} \end{bmatrix} \quad (پ-۹)$$

$$\mathbf{W}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CB} & \mathbf{D} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CAB} & \mathbf{CB} & \mathbf{D} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{\mathrm{n}-2}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{\mathrm{n}-3}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{\mathrm{n}-4}\mathbf{B} & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{i-1}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{i-2}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{i-3}\mathbf{B} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad (پ-۱۰)$$

$$\mathbf{W}_{\mathbf{d}_i} = \begin{bmatrix} \mathbf{D_d} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CB_d} & \mathbf{D_d} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CAB_d} & \mathbf{CB_d} & \mathbf{D_d} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{\mathrm{n}-2}\mathbf{B_d} & \mathbf{CA}^{\mathrm{n}-3}\mathbf{B_d} & \mathbf{CA}^{\mathrm{n}-4}\mathbf{B_d} & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{i-1}\mathbf{B_d} & \mathbf{CA}^{i-2}\mathbf{B_d} & \mathbf{CA}^{i-3}\mathbf{B_d} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{D_d} \end{bmatrix} \quad (پ-۱۱)$$

معادله فوق به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{z}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{z}^{(\mathrm{n}-1)} \\ \vdots \\ \mathbf{z}^{(i)} \end{bmatrix} - \mathbf{W}_i \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta} \\ \boldsymbol{\delta}^{(1)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\delta}^{(\mathrm{n}-1)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\delta}^{(i)} \end{bmatrix} = \mathbf{O}_i\,\mathbf{x} + \mathbf{W}_{\mathbf{d}_i} \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{d}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{d}^{(\mathrm{n}-1)} \\ \vdots \\ \mathbf{d}^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_i & \mathbf{W}_{\mathbf{d}_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{d} \\ \vdots \\ \mathbf{d}^{(\mathrm{n}-1)} \\ \vdots \\ \mathbf{d}^{(i)} \end{bmatrix} \quad (پ-۱۲)$$

از آنجا که، ورودی‌های سیستم و مشاهدات معلوم هستند؛ سمت چپ معادله فوق معلوم است. بنـابراین، به‌منظور بازیابی بردار متغیرهای حالت، $\mathbf{x}$، از دنباله ورودی‌های نامعلوم، $\mathbf{d},...,\mathbf{d}^{(\tau)}$، بر طبـق قضـیه ۱۵،

که در پیوست "چ" بیان شده‌است، ستون‌های ماتریس $\mathbf{O}_i$ باید مستقل خطی از ستون‌های $\mathbf{W}_{\mathbf{d}_i}$ باشد؛ یعنی:

$$\text{rank}\left(\begin{bmatrix}\mathbf{O}_i & \mathbf{W}_{\mathbf{d}_i}\end{bmatrix}\right)=\text{rank}\left(\mathbf{O}_i\right)+\text{rank}\left(\mathbf{W}_{\mathbf{d}_i}\right) \qquad \text{(پ-۱۳)}$$

همچنین، به‌منظور بازیابی متغیرهای حالت، $\mathbf{x}$، رنک ماتریس $\mathbf{O}_i$ باید کامل باشد. یعنی:

$$\text{rank}\left(\mathbf{O}_i\right)=\text{n} \qquad \text{(پ-۱۴)}$$

بنابراین،

$$\text{rank}\left(\begin{bmatrix}\mathbf{O}_i & \mathbf{W}_{\mathbf{d}_i}\end{bmatrix}\right)=\text{n}+\text{rank}\left(\mathbf{W}_{\mathbf{d}_i}\right) \qquad \text{(پ-۱۵)}$$

بر مبنای قضیه کیلی-همیلتون [۱۷۲]، توان‌های $\mathbf{A}^i$ با $i \ge \text{n}$ می‌توانند به‌صورت ترکیب خطی $\mathbf{I},\mathbf{A},\ldots,\mathbf{A}^{\text{n}-1}$ بیان شود. بنابراین، شرایط قبل به ازای $i=\text{n}-1$ معتبر است. در نتیجه، ماتریس‌های $\mathbf{O}_i$، $\mathbf{W}_i$ و $\mathbf{W}_{\mathbf{d}_i}$ به‌صورت زیر کاهش می‌یابد:

$$\mathbf{O}_\text{n}=\begin{bmatrix}\mathbf{C}\\ \mathbf{CA}\\ \vdots\\ \mathbf{CA}^{\text{n}-1}\end{bmatrix} \qquad \text{(پ-۱۶)}$$

$$\mathbf{W}_\text{n}=\begin{bmatrix}\mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \mathbf{CB} & \mathbf{D} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \mathbf{CAB} & \mathbf{CB} & \mathbf{D} & \cdots & \mathbf{0}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{CA}^{\text{n}-2}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{\text{n}-3}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{\text{n}-4}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{D}\end{bmatrix} \qquad \text{(پ-۱۷)}$$

$$\mathbf{W}_\mathbf{d}=\begin{bmatrix}\mathbf{D}_\mathbf{d} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \mathbf{CB}_\mathbf{d} & \mathbf{D}_\mathbf{d} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \mathbf{CAB}_\mathbf{d} & \mathbf{CB}_\mathbf{d} & \mathbf{D}_\mathbf{d} & \cdots & \mathbf{0}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{CA}^{\text{n}-2}\mathbf{B}_\mathbf{d} & \mathbf{CA}^{\text{n}-3}\mathbf{B}_\mathbf{d} & \mathbf{CA}^{\text{n}-4}\mathbf{B}_\mathbf{d} & \cdots & \mathbf{D}_\mathbf{d}\end{bmatrix} \qquad \text{(پ-۱۸)}$$

اینجـا، $\mathbf{O}_n$، $\mathbf{W}_n$ و $\mathbf{W_d}$ بـه‌ترتیب بیـانگر مـاتریس مشـاهده‌پذیری بـرای جفـت $(\mathbf{A},\ \mathbf{C})$، مـاتریس معکوس‌پذیری ورودی برای چهارگانه $(\mathbf{A, B, C, D})$ و ماتریس معکوس‌پذیری ورودی‌های مجهول برای چهارگانه $(\mathbf{A, B_d, C, D_d})$ هستند.

شرط کافی: با درنظرگرفتن معادلات (پ-۱۴) و (پ-۱۵)، بر مبنای تضاد فـرض می‌شـود کـه سیسـتم مشـاهده پـذیر قـوی نیسـت. بـه عبـارت دیگـر، $\mathbf{x}'$ غیرقابـل تشـخیص از $\mathbf{x}$ اسـت؛ به‌گونـه‌ای کـه $\mathbf{z}^{(0):(n-1)}\left(\mathbf{x}',\boldsymbol{\delta}^{(0):(n-1)},\mathbf{d}^{(1):(n-1)}\right)=\mathbf{z}^{(0):(n-1)}\left(\mathbf{x},\boldsymbol{\delta}^{(0):(n-1)},\mathbf{d}^{(0):(n-1)}\right)$ برقرار باشد. در نتیجه،

$$\mathbf{O}_n\,\mathbf{x}'+\mathbf{W_d}\begin{bmatrix}\mathbf{d}\\ \mathbf{d}^{(1)}\\ \vdots\\ \mathbf{d}^{(n-1)}\end{bmatrix}+\mathbf{W}_n\begin{bmatrix}\boldsymbol{\delta}\\ \boldsymbol{\delta}^{(1)}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\delta}^{(n-1)}\end{bmatrix}=\mathbf{O}_n\,\mathbf{x}+\mathbf{W_d}\begin{bmatrix}\mathbf{d}\\ \mathbf{d}^{(1)}\\ \vdots\\ \mathbf{d}^{(n-1)}\end{bmatrix}+\mathbf{W}_n\begin{bmatrix}\boldsymbol{\delta}\\ \boldsymbol{\delta}^{(1)}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\delta}^{(n-1)}\end{bmatrix}\qquad (پ-۱۹)$$

بنابراین نتیجه می‌شود که $\mathbf{O}_n(\mathbf{x}'-\mathbf{x})=\mathbf{0}$ است؛ یعنی رنک ماتریس $\mathbf{O}_n$ کامل نیست؛ که بیـانگر تضـاد است. لذا، سیستم خطی پیوسته مشاهده‌پذیر قوی است.

اثبات قضیه ۳ (مشاهده‌پذیری ورودی‌های نامعلوم): در این بخش اثبات قضیه ۳ مرتبط با شرایط مشاهده‌پذیری ورودی‌های نامعلوم برای یک سیستم خطی پیوسته زمان بیان می‌شود.

شرط لازم: خروجی سیستم و مشتقات آن تا مرتبه i-ام بر طبق معادله (پ-۱۲) با پارتیشن‌بندی $\mathbf{W}_{\mathbf{d}_i}=\begin{bmatrix}\mathbf{O}_{\mathrm{d}_i} & \mathbf{W}'_{\mathbf{d}_i}\end{bmatrix}$ به‌صورت زیر در فرم ماتریسی بیان می‌شود:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{z}\\ \mathbf{z}^{(1)}\\ \vdots\\ \mathbf{z}^{(\mathrm{n})}\\ \vdots\\ \mathbf{z}^{(i)}\end{bmatrix}=\mathbf{O}_i\ \mathbf{x}+\mathbf{W}_i\begin{bmatrix}\boldsymbol{\delta}\\ \boldsymbol{\delta}^{(1)}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\delta}^{(\mathrm{n})}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\delta}^{(i)}\end{bmatrix}+\mathbf{O}_{\mathrm{d}_i}\,\mathbf{d}+\mathbf{W}'_{\mathbf{d}_i}\begin{bmatrix}\mathbf{d}^{(1)}\\ \vdots\\ \mathbf{d}^{(\mathrm{n})}\\ \vdots\\ \mathbf{d}^{(i)}\end{bmatrix} \qquad (\text{پ-۲۰})$$

جاییکه؛

$$\mathbf{O}_{\mathrm{d}_i}=\begin{bmatrix}\mathbf{D}_\mathbf{d}\\ \mathbf{CB}_\mathbf{d}\\ \mathbf{CAB}_\mathbf{d}\\ \vdots\\ \mathbf{CA}^{\mathrm{n}-1}\mathbf{B}_\mathbf{d}\\ \vdots\\ \mathbf{CA}^{i-1}\mathbf{B}_\mathbf{d}\end{bmatrix};\mathbf{W}'_{\mathbf{d}_i}=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0}\\ \mathbf{D}_\mathbf{d} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0}\\ \mathbf{CB}_\mathbf{d} & \mathbf{D}_\mathbf{d} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \mathbf{CA}^{\mathrm{n}-2}\mathbf{B}_\mathbf{d} & \mathbf{CA}^{\mathrm{n}-3}\mathbf{B}_\mathbf{d} & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{CA}^{i-2}\mathbf{B}_\mathbf{d} & \mathbf{CA}^{i-3}\mathbf{B}_\mathbf{d} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{D}_\mathbf{d}\end{bmatrix} \qquad (\text{پ-۲۱})$$

معادله فوق به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{z}\\ \mathbf{z}^{(1)}\\ \vdots\\ \mathbf{z}^{(\mathrm{n})}\\ \vdots\\ \mathbf{z}^{(i)}\end{bmatrix}-\mathbf{O}_i\ \mathbf{x}-\mathbf{W}_i\begin{bmatrix}\boldsymbol{\delta}\\ \boldsymbol{\delta}^{(1)}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\delta}^{(\mathrm{n})}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\delta}^{(i)}\end{bmatrix}=\mathbf{O}_{\mathrm{d}_i}\,\mathbf{d}+\mathbf{W}'_{\mathbf{d}_i}\begin{bmatrix}\mathbf{d}^{(1)}\\ \vdots\\ \mathbf{d}^{(\mathrm{n})}\\ \vdots\\ \mathbf{d}^{(i)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{O}_{\mathrm{d}_i} & \mathbf{W}'_{\mathbf{d}_i}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{d}\\ \mathbf{d}^{(1)}\\ \vdots\\ \mathbf{d}^{(\mathrm{n})}\\ \vdots\\ \mathbf{d}^{(i)}\end{bmatrix} \qquad (\text{پ-۲۲})$$

سمت چپ معادله فوق معلوم است. بنابراین، بـه‌منظور بازیـابی ورودی‌هـای نـامعلوم $\mathbf{d}$، از دنبالـه سـایر ورودی‌های نامعلوم، $\mathbf{d}^{(1)},...,\mathbf{d}^{(i)}$، بر طبق قضیه ۱۳، که در پیوست "چ" بیان شده‌است، باید سـتون‌های ماتریس $\mathbf{O}_{\mathrm{d}_i}$ مستقل خطی از ستون‌های $\mathbf{W}'_{\mathbf{d}_i}$ باشد؛ یعنی:

$$\operatorname{rank}\left(\left[\mathbf{O}_{\mathrm{d}_i} \quad \mathbf{W}'_{\mathbf{d}_i}\right]\right) = \operatorname{rank}\left(\mathbf{O}_{\mathrm{d}_i}\right) + \operatorname{rank}\left(\mathbf{W}'_{\mathbf{d}_i}\right) \tag{پ-۲۳}$$

همچنین، به‌منظور بازیابی ورودی نامعلوم، $\mathbf{d}$، رنک ستونی ماتریس $\mathbf{O}_{\mathrm{d}_i}$ باید کامل باشد. یعنی:

$$\operatorname{rank}\left(\mathbf{O}_{\mathrm{d}_i}\right) = \mathrm{n}_{\mathrm{d}} \tag{پ-۲۴}$$

بنابراین،

$$\operatorname{rank}\left(\left[\mathbf{O}_{\mathrm{d}_i} \quad \mathbf{W}'_{\mathbf{d}_i}\right]\right) = \mathrm{n}_{\mathrm{d}} + \operatorname{rank}\left(\mathbf{W}'_{\mathbf{d}_i}\right) \tag{پ-۲۵}$$

بر مبنای قضیه کیلی-همیلتـون [۱۷۲]، توان‌هـای $\mathbf{A}^i$ بـا $i \geq \mathrm{n}$ می‌توانـد به‌صـورت ترکیـب خطـی $\mathbf{I}, \mathbf{A}, ..., \mathbf{A}^{\mathrm{n}-1}$ بیـان شـود. بنـابراین، شـرایط قبـل بـه ازای $i = 0, 1, ..., \mathrm{n}$ معتبـر اسـت. در نتیجـه، ماتریس‌های $\mathbf{O}_{\mathrm{d}_i}$، $\mathbf{W}_i$ و $\mathbf{W}'_{\mathbf{d}_i}$ به‌صورت زیر کاهش می‌یابد:

$$\mathbf{O}_{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{\mathbf{d}} \\ \mathbf{C}\mathbf{B}_{\mathbf{d}} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B}_{\mathbf{d}} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{\mathrm{n}\text{-}1}\mathbf{B}_{\mathbf{d}} \end{bmatrix} \tag{پ-۲۶}$$

$$\mathbf{W}_{\mathrm{n}+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CB} & \mathbf{D} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CAB} & \mathbf{CB} & \mathbf{D} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{\mathrm{n}-1}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{\mathrm{n}-2}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{\mathrm{n}-3}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{D} \end{bmatrix} \tag{پ-۲۷}$$

$$\mathbf{W}'_{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{D_d} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CB_d} & \mathbf{D_d} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-2}\mathbf{B_d} & \mathbf{CA}^{n-3}\mathbf{B_d} & \cdots & \mathbf{D_d} \end{bmatrix} \qquad \text{(پ-۲۸)}$$

اینجا، $\mathbf{O_d}$ و $\mathbf{W}'_{\mathbf{d}}$ به‌ترتیب بیانگر ماتریس مشاهده‌پذیری ورودی نامعلوم و ماتریس معکوس‌پذیری ورودی‌های مجهول مرتبط با اولین تا nامین مشتق $\mathbf{d}_k$ برای چهارگانه $(\mathbf{A}, \mathbf{B_d}, \mathbf{C}, \mathbf{D_d})$ هستند.

شرط کافی: با درنظرگرفتن معادلات (پ-۲۴) و (پ-۲۵)، بر مبنای تضاد فرض می‌شود که سیستم مشاهده‌پذیر ورودی نامعلوم نیست. به عبارت دیگر، $\mathbf{d}'$ غیرقابل تشخیص از $\mathbf{d}$ است؛ به‌گونه‌ای که $\mathbf{z}^{(0):(n)}\left(\mathbf{d}', \mathbf{x}, \boldsymbol{\delta}^{(0):(n)}, \mathbf{d}^{(1):(n)}\right) = \mathbf{z}^{(0):(n)}\left(\mathbf{d}, \mathbf{x}, \boldsymbol{\delta}^{(0):(n)}, \mathbf{d}^{(1):(n)}\right)$ برقرار باشد. در نتیجه،

$$\mathbf{O_d}\mathbf{d}' + \mathbf{O}_{n+1}\mathbf{x}' + \mathbf{W}_{n+1}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta} \\ \boldsymbol{\delta}^{(1)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\delta}^{(n)} \end{bmatrix} + \mathbf{W}'_{\mathbf{d}}\begin{bmatrix} \mathbf{d}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{d}^{(n)} \end{bmatrix} = \mathbf{O_d}\mathbf{d} + \mathbf{O}_{n+1}\mathbf{x} + \mathbf{W}_{n+1}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta} \\ \boldsymbol{\delta}^{(1)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\delta}^{(n)} \end{bmatrix} + \mathbf{W}'_{\mathbf{d}}\begin{bmatrix} \mathbf{d}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{d}^{(n)} \end{bmatrix} \qquad \text{(پ-۲۹)}$$

جاییکه؛

$$\mathbf{O}_{n+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n} \end{bmatrix} \qquad \text{(پ-۳۰)}$$

بنابراین نتیجه می‌شود که $\mathbf{O_d}\left(\mathbf{d}' - \mathbf{d}\right) = \mathbf{0}$ است؛ یعنی رنک ماتریس $\mathbf{O_d}$ کامل نیست؛ که بیانگر تضاد است. لذا، سیستم خطی پیوسته زمان مشاهده‌پذیر ورودی نامعلوم است.

اثبات قضیه ۴ (مشاهده‌پذیری توأمان متغیرهای حالت و ورودی‌های نامعلوم): در این بخش اثبات قضیه ۴ مرتبط با شرایط مشاهده‌پذیری توأمان متغیرهای حالت و ورودی‌های نامعلوم برای یک سیستم خطی پیوسته زمان بیان می‌شود.

شرط لازم: خروجی سیستم و مشتقات آن تا مرتبه τام بر طبق معادله (پ-۲۲) به‌صورت زیر در فرم ماتریسی بیان می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{z}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{z}^{(n)} \\ \vdots \\ \mathbf{z}^{(i)} \end{bmatrix} - \mathbf{W}_i \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta} \\ \boldsymbol{\delta}^{(1)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\delta}^{(n)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\delta}^{(i)} \end{bmatrix} = \mathbf{O}_{\mathrm{nd}_i}\,\mathbf{x}_{\mathrm{a}} + \mathbf{W}'_{\mathbf{d}_i} \begin{bmatrix} \mathbf{d}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{d}^{(n)} \\ \vdots \\ \mathbf{d}^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{\mathrm{nd}_i} & \mathbf{W}'_{\mathbf{d}_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\mathrm{a}} \\ \mathbf{d}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{d}^{(n)} \\ \vdots \\ \mathbf{d}^{(i)} \end{bmatrix} \qquad \text{(پ-۳۱)}$$

در رابطه فوق، $\mathbf{O}_{\mathrm{nd}_i} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_i & \mathbf{O}_{\mathrm{d}_i} \end{bmatrix}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{O}_{\mathrm{nd}_i} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D}_{\mathbf{d}} \\ \mathbf{CA} & \mathbf{CB}_{\mathbf{d}} \\ \mathbf{CA}^2 & \mathbf{CAB}_{\mathbf{d}} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{\mathrm{n}} & \mathbf{CA}^{\mathrm{n}-1}\mathbf{B}_{\mathbf{d}} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{i} & \mathbf{CA}^{i-1}\mathbf{B}_{\mathbf{d}} \end{bmatrix} \qquad \text{(پ-۳۲)}$$

از آنجاکه، ورودی‌های سیستم و مشاهدات معلوم هستند؛ لذا سمت چپ معادله فوق معلوم است. بنابراین، متغیرهای حالت افزونه $\mathbf{x}_{\mathrm{a}}$ می‌تواند به‌صورت یکتا از معادله (پ-۳۱) بازیابی شود؛ اگر رنک ستونی ماتریس $\mathbf{O}_{\mathrm{nd}_i}$ کامل باشد. یعنی:

$$\mathrm{rank}\left(\mathbf{O}_{\mathrm{nd}_i}\right) = \mathrm{n}+\mathrm{n}_{\mathrm{d}} \qquad \text{(پ-۳۳)}$$

همچنین، ستون‌های ماتریس $\mathbf{O}_{\mathrm{nd}_i}$ باید مستقل خطی از ستون‌های ماتریس $\mathbf{W}'_{\mathbf{d}_i}$ باشد؛ یعنی:

$$\mathrm{rank}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{O}_{\mathrm{nd}_i} & \mathbf{W}'_{\mathbf{d}_i} \end{bmatrix}\right) = \mathrm{rank}\left(\mathbf{O}_{\mathrm{nd}_i}\right) + \mathrm{rank}(\mathbf{W}'_{\mathbf{d}_i}) \qquad \text{(پ-۳۴)}$$

بنابراین،

$$\mathrm{rank}\left(\begin{bmatrix}\mathbf{O}_{\mathrm{nd}_i} & \mathbf{W}'_{\mathbf{d}_i}\end{bmatrix}\right)=\mathrm{n}+\mathrm{n}_\mathrm{d}+\mathrm{rank}(\mathbf{W}'_{\mathbf{d}_i}) \qquad \text{(پ-۳۵)}$$

بر مبنای قضیه کیلی-همیلتون، شرایط بیان‌شده به ازای $i=0, 1, ..., \mathrm{n}$ معتبر است. در نتیجه، ماتریس $\mathbf{O}_{\mathrm{nd}_i}$ به‌صورت زیر کاهش می‌یابد:

$$\mathbf{O}_{\mathrm{nd}}=\begin{bmatrix}\mathbf{C} & \mathbf{D_d}\\ \mathbf{CA} & \mathbf{CB_d}\\ \mathbf{CA}^2 & \mathbf{CAB_d}\\ \vdots & \vdots\\ \mathbf{CA}^\mathrm{n} & \mathbf{CA}^{\mathrm{n}-1}\mathbf{B_d}\end{bmatrix} \qquad \text{(پ-۳۶)}$$

در رابطه فوق، $\mathbf{O}_{\mathrm{nd}}=\begin{bmatrix}\mathbf{O}_\mathrm{n} & \mathbf{O}_\mathrm{d}\end{bmatrix}$ بیانگر ماتریس مشاهده پذیری متغیر حالت افزونه است.

شرط کافی: با درنظرگرفتن معادلات (پ-۳۴) و (پ-۳۵)، بر مبنای تضاد فرض می‌شود که سیستم مشاهده‌پذیر توامان متغیر حالت و ورودی نامعلوم نیست. به عبارت دیگر، $\mathbf{x}'_\mathrm{a}$ غیرقابل تشخیص از $\mathbf{x}_\mathrm{a}$ است؛ لذا $\mathbf{z}^{(0):(\mathrm{n})}\left(\mathbf{x}_\mathrm{a},\boldsymbol{\delta}^{(0):(\mathrm{n})},\mathbf{d}^{(1):(\mathrm{n})}\right)=\mathbf{z}^{(0):(\mathrm{n})}\left(\mathbf{x}'_\mathrm{a},\boldsymbol{\delta}^{(0):(\mathrm{n})},\mathbf{d}^{(1):(\mathrm{n})}\right)$ برقرار است. در نتیجه،

$$\mathbf{O}_{\mathrm{nd}}\,\mathbf{x}'_\mathrm{a}+\mathbf{W}_{\mathrm{n}+1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\delta}\\ \boldsymbol{\delta}^{(1)}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\delta}^{(\mathrm{n})}\end{bmatrix}+\mathbf{W}'_\mathbf{d}\begin{bmatrix}\mathbf{d}^{(1)}\\ \\ \vdots\\ \mathbf{d}^{(\mathrm{n})}\end{bmatrix}=\mathbf{O}_{\mathrm{nd}}\,\mathbf{x}_\mathrm{a}+\mathbf{W}_{\mathrm{n}+1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\delta}\\ \boldsymbol{\delta}^{(1)}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\delta}^{(\mathrm{n})}\end{bmatrix}+\mathbf{W}'_\mathbf{d}\begin{bmatrix}\mathbf{d}^{(1)}\\ \\ \vdots\\ \mathbf{d}^{(\mathrm{n})}\end{bmatrix} \qquad \text{(پ-۳۷)}$$

بنابراین نتیجه می‌شود که $\mathbf{O}_{\mathrm{nd}}\left(\mathbf{x}'_\mathrm{a}-\mathbf{x}_\mathrm{a}\right)=\mathbf{0}$ است؛ یعنی رنک ماتریس $\mathbf{O}_{\mathrm{nd}}$ کامل نیست؛ که بیانگر تضاد است. لذا، سیستم خطی پیوسته مشاهده‌پذیر توامان متغیر حالت و ورودی نامعلوم است.

اثبات قضیه ۵ (مشاهده‌پذیری متغیرهای حالت سیستم غیرخطی در حضور خطای خطی‌سازی): در این بخش اثبات قضیه ۵ مرتبط با شرایط مشاهده‌پذیری متغیرهای حالت یک سیستم غیرخطی پیوسته زمان در حضور خطای خطی‌سازی بیان می‌شود.

شرط لازم: مدل دینامیکی از یک سیستم غیرخطی به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\delta}) \tag{پ-۳۸}$$

این مدل حول نقاط تعادل برطبق سری تیلور به‌صورت زیر خطی‌سازی می‌شود:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{پ-۳۹}$$

در رابطه فوق، $\boldsymbol{\varepsilon}$ بیانگر خطاهای خطی‌سازی است. بر مبنای قضیه محدوده خطای لاگرانژ[۱۲۴] [۱۷۳]، محدوده بیشینه خطاهای خطی‌سازی برابر با بزرگترین مقدار مشتق دوم یک سیستم غیرخطی در نقطه تعادل است، که به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\max(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2}\mathbf{m}\, e + \frac{1}{2}\mathbf{m}_{\boldsymbol{\delta}}\, e_{\boldsymbol{\delta}} \tag{پ-۴۰}$$

در رابطه فوق، e بیانگر مشتق دوم سیستم غیرخطی نسبت به متغیرهای حالت است، که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$e = \left(x_1 - x_1^*\right)^2 + \left(x_2 - x_2^*\right)^2 + \cdots + \left(x_n - x_n^*\right)^2 + 2\left(x_1 - x_1^*\right)\left(x_2 - x_2^*\right) + \cdots + 2\left(x_{n-1} - x_{n-1}^*\right)\left(x_n - x_n^*\right) \tag{پ-۴۱}$$

که $\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} x_1^* & x_2^* & \cdots & x_n^* \end{bmatrix}^T$ بیانگر بردار متغیرهای حالت در نقطه تعادل است. همچنین، $\mathbf{m}$ نشان‌دهنده بردار بیشینه e در نقطه تعادل است، که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

[124] Lagrange Error Bound Theorem

$$\mathbf{m}=\begin{bmatrix} \max\left(\left|\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1{}^2}\right|,\left|\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 x_2}\right|,\ldots,\left|\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 x_n}\right|\ldots,\left|\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_n{}^2}\right|\right) \\ \max\left(\left|\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1{}^2}\right|,\left|\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 x_2}\right|,\ldots,\left|\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 x_n}\right|\ldots,\left|\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_n{}^2}\right|\right) \\ \vdots \\ \max\left(\left|\frac{\partial^2 f_n}{\partial x_1{}^2}\right|,\left|\frac{\partial^2 f_n}{\partial x_1 x_2}\right|,\ldots,\left|\frac{\partial^2 f_n}{\partial x_1 x_n}\right|\ldots,\left|\frac{\partial^2 f_n}{\partial x_n{}^2}\right|\right) \end{bmatrix} \qquad (\text{پ-۴۲})$$

همچنین، e_δ و $\mathbf{m}_\delta$ در نقاط تعادل به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$e_\delta = u_1{}^2 + u_2{}^2 + \cdots + u_n{}^2 + 2u_1u_2 + \cdots + 2u_{n-1}u_n \qquad (\text{پ-۴۳})$$

$$\mathbf{m}_\delta=\begin{bmatrix} \max\left(\left|\frac{\partial^2 f_1}{\partial u_1{}^2}\right|,\left|\frac{\partial^2 f_1}{\partial u_1 u_2}\right|,\ldots,\left|\frac{\partial^2 f_1}{\partial u_1 u_n}\right|\ldots,\left|\frac{\partial^2 f_1}{\partial u_n{}^2}\right|\right) \\ \max\left(\left|\frac{\partial^2 f_2}{\partial u_1{}^2}\right|,\left|\frac{\partial^2 f_2}{\partial u_1 u_2}\right|,\ldots,\left|\frac{\partial^2 f_2}{\partial u_1 u_n}\right|\ldots,\left|\frac{\partial^2 f_2}{\partial u_n{}^2}\right|\right) \\ \vdots \\ \max\left(\left|\frac{\partial^2 f_n}{\partial u_1{}^2}\right|,\left|\frac{\partial^2 f_n}{\partial u_1 u_2}\right|,\ldots,\left|\frac{\partial^2 f_n}{\partial u_1 u_n}\right|\ldots,\left|\frac{\partial^2 f_n}{\partial u_n{}^2}\right|\right) \end{bmatrix} \qquad (\text{پ-۴۴})$$

به‌منظور بررسی تاثیر خطاهای خطی‌سازی بر روی مشاهده‌پذیری متغیرهای حالت، مدل زیـر بـر طبـق معادلات (پ-۳۹)، (پ-۴۰) و (۲۰.۴) به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{B}\,\boldsymbol{\delta} + \frac{1}{2}\mathbf{m}\,e + \frac{1}{2}\mathbf{m}_\delta\, e_\delta \\ \mathbf{z} = \mathbf{C}\,\mathbf{x} \end{cases} \qquad (\text{پ-۴۵})$$

در نتیجه، خروجی سیستم و مشتقات زمانی آن تا مرتبه i–ام به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{cases} \mathbf{z} = \mathbf{C}\mathbf{x} \\ \mathbf{z}^{(1)} = \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{C}\mathbf{B}\boldsymbol{\delta} + \frac{1}{2}\mathbf{C}\mathbf{m}e + \frac{1}{2}\mathbf{C}\mathbf{m}_{\delta}e_{\delta} \\ \vdots \\ \mathbf{z}^{(n-1)} = \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{x} + \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-2}\mathbf{B}\boldsymbol{\delta} + \cdots + \mathbf{C}\mathbf{B}\boldsymbol{\delta}^{(n-2)} + \cdots + \frac{1}{2}\mathbf{C}\mathbf{A}^{n-2}\mathbf{m}e + \frac{1}{2}\mathbf{C}\mathbf{A}^{n-3}\mathbf{m}e^{(1)} + \cdots + \frac{1}{2}\mathbf{C}\mathbf{m}e^{(n-2)} \\ \quad + \frac{1}{2}\mathbf{C}\mathbf{A}^{n-2}\mathbf{m}_{\delta}e_{\delta} + \frac{1}{2}\mathbf{C}\mathbf{A}^{n-3}\mathbf{m}_{\delta}e_{\delta}^{(1)} + \cdots + \frac{1}{2}\mathbf{C}\mathbf{m}_{\delta}e_{\delta}^{(n-2)} \\ \vdots \\ \mathbf{z}^{(i)} = \mathbf{C}\mathbf{A}^{i}\mathbf{x} + \mathbf{C}\mathbf{A}^{i-1}\mathbf{B}\boldsymbol{\delta} + \cdots + \mathbf{C}\mathbf{B}\boldsymbol{\delta}^{(i-1)} + \cdots + \frac{1}{2}\mathbf{C}\mathbf{A}^{i-1}\mathbf{m}e + \frac{1}{2}\mathbf{C}\mathbf{A}^{i-2}\mathbf{m}e^{(1)} + \cdots + \frac{1}{2}\mathbf{C}\mathbf{m}e^{(i-1)} \\ \quad + \frac{1}{2}\mathbf{C}\mathbf{A}^{i-1}\mathbf{m}_{\delta}e_{\delta} + \frac{1}{2}\mathbf{C}\mathbf{A}^{i-2}\mathbf{m}_{\delta}e_{\delta}^{(1)}\cdots + \frac{1}{2}\mathbf{C}\mathbf{m}_{\delta}e_{\delta}^{(i-1)} \end{cases} \tag{پ-۴۶}$$

این معادلات در فرم ماتریسی به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{z}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{z}^{(n-1)} \\ \vdots \\ \mathbf{z}^{(i)} \end{bmatrix} = \mathbf{O}_{0:i}\mathbf{x} + \mathbf{W}_{0:i}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta} \\ \boldsymbol{\delta}^{(1)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\delta}^{(n-1)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\delta}^{(i)} \end{bmatrix} + \mathbf{E}_{0:i}\begin{bmatrix} e \\ e^{(1)} \\ \vdots \\ e^{(n-1)} \\ \vdots \\ e^{(i)} \end{bmatrix} + \mathbf{E}_{\delta_{0:i}}\begin{bmatrix} e_{\delta} \\ e_{\delta}^{(1)} \\ \vdots \\ e_{\delta}^{(n-1)} \\ \vdots \\ e_{\delta}^{(i)} \end{bmatrix} \tag{پ-۴۷}$$

که

$$\mathbf{O}_{0:i} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{i} \end{bmatrix} \tag{پ-۴۸}$$

$$\mathbf{W}_{0:i} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CB} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CAB} & \mathbf{CB} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-2}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{n-3}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{n-4}\mathbf{B} & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{i-1}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{i-2}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{i-3}\mathbf{B} & \cdots & \cdots & \mathbf{CB} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{پ-۴۹}$$

$$\mathbf{E}_{0:i}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{Cm} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CAm} & \mathbf{Cm} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{\mathrm{n}-2}\mathbf{m} & \mathbf{CA}^{\mathrm{n}-3}\mathbf{m} & \mathbf{CA}^{\mathrm{n}-4}\mathbf{m} & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{i-1}\mathbf{m} & \mathbf{CA}^{i-2}\mathbf{m} & \mathbf{CA}^{i-3}\mathbf{m} & \cdots & \cdots & \mathbf{Cm} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \qquad (\text{پ-۵۰})$$

$$\mathbf{E}_{\delta_{0:i}}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{Cm}_{\delta} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CAm}_{\delta} & \mathbf{Cm}_{\delta} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{\mathrm{n}-2}\mathbf{m}_{\delta} & \mathbf{CA}^{\mathrm{n}-3}\mathbf{m}_{\delta} & \mathbf{CA}^{\mathrm{n}-4}\mathbf{m}_{\delta} & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{i-1}\mathbf{m}_{\delta} & \mathbf{CA}^{i-2}\mathbf{m}_{\delta} & \mathbf{CA}^{i-3}\mathbf{m}_{\delta} & \cdots & \cdots & \mathbf{Cm}_{\delta} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \qquad (\text{پ-۵۱})$$

معادله (پ-۴۷) به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{z}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{z}^{(\mathrm{n}-1)} \\ \vdots \\ \mathbf{z}^{(i)} \end{bmatrix} - \mathbf{W}_{0:i}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta} \\ \boldsymbol{\delta}^{(1)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\delta}^{(\mathrm{n}-1)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\delta}^{(i)} \end{bmatrix} - \mathbf{E}_{\delta_{0:i}}\begin{bmatrix} e_{\delta} \\ e_{\delta}^{(1)} \\ \vdots \\ e_{\delta}^{(\mathrm{n}-1)} \\ \vdots \\ e_{\delta}^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{0:i} & \mathbf{E}_{0:i} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ e \\ \vdots \\ e^{(\mathrm{n}-1)} \\ \vdots \\ e^{(i)} \end{bmatrix} \qquad (\text{پ-۵۲})$$

از انجاکه، سمت چپ معادله فوق معلوم است؛ لذا برطبق قضیه ۱۵، که در پیوست"چ" بیان شده‌است، به‌منظور بازیابی متغیرهای حالت، $\mathbf{x}$، از خطاهای خطی‌سازی، $e^{(1)},...,e^{(i)}$، ستون‌های ماتریس $\mathbf{O}_{0:i}$ باید مستقل خطی از ستون‌های ماتریس $\mathbf{E}_{0:i}$ باشد؛ یعنی:

$$\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{O}_{0:i} & \mathbf{E}_{0:i} \end{bmatrix}\right) = \operatorname{rank}\left(\mathbf{O}_{0:i}\right) + \operatorname{rank}\left(\mathbf{E}_{0:i}\right) \qquad (\text{پ-۵۳})$$

همچنین، رنک ماتریس $\mathbf{O}_{0:i}$ به‌منظور تعیین متغیرهای حالت $\mathbf{x}$ باید کامل باشد؛ یعنی:

$$\operatorname{rank}\left(\mathbf{O}_{0:i}\right) = \mathrm{n} \qquad (\text{پ-۵۴})$$

بنابراین،

$$\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix}\mathbf{O}_{0:i} & \mathbf{E}_{0:i}\end{bmatrix}\right)=\mathrm{n}+\operatorname{rank}\left(\mathbf{E}_{0:i}\right) \tag{پ-۵۵}$$

بر مبنای قضیه کیلی-همیلتون، توان‌های ماتریس $\mathbf{A}^i$ به‌ازای $i \geq \mathrm{n}$ ترکیب خطـی از $\mathbf{I}, \mathbf{A}, ..., \mathbf{A}^{\mathrm{n}-1}$ هستند. لذا، شرایط قبلی به‌ازای $i = 0, 1, ..., \mathrm{n}-1$ معتبر است. در نتیجه، ابعاد ماتریس‌های $\mathbf{O}_{0:i}$ و $\mathbf{E}_{0:i}$ به‌صورت زیر کاهش می‌یابند:

$$\mathbf{O}_{\mathrm{n}}=\begin{bmatrix}\mathbf{C}\\ \mathbf{C}\mathbf{A}\\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2\\ \vdots\\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{\mathrm{n}-1}\end{bmatrix} \tag{پ-۵۶}$$

$$\mathbf{E}_{\mathrm{n}}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \mathbf{C}\mathbf{m} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{m} & \mathbf{C}\mathbf{m} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{\mathrm{n}-2}\mathbf{m} & \mathbf{C}\mathbf{A}^{\mathrm{n}-3}\mathbf{m} & \cdots & \mathbf{C}\mathbf{m} & \mathbf{0}\end{bmatrix} \tag{پ-۵۷}$$

اینجـا، ماتریس‌هـای $\mathbf{O}_{\mathrm{n}}$ و $\mathbf{E}_{\mathrm{n}}$ مـاتریس مشـاهده‌پذیری متغیرهـای حالـت و مـاتریس خطـای خطی‌سازی‌شده نامیده می‌شوند.

شرط کافی: با درنظرگرفتن معادلات (پ-۵۴) و (پ-۵۵)، بر مبنای تضاد فـرض می‌شـود کـه سیسـتم مشاهده‌پذیر متغیر حالت در حضور خطاهای خطی‌سازی نیست. به عبارت دیگر، $\mathbf{x}'$ غیرقابل تشخیص از $\mathbf{x}$ است؛ لذا $\mathbf{z}^{(0):(\mathrm{n}-1)}\left(\mathbf{x},\boldsymbol{\delta}^{(0):(\mathrm{n}-1)},e^{(0):(\mathrm{n}-1)},e_{\boldsymbol{\delta}}^{(0):(\mathrm{n}-1)}\right)=\mathbf{z}^{(0):(\mathrm{n}-1)}\left(\mathbf{x}',\boldsymbol{\delta}^{(0):(\mathrm{n}-1)},e^{(0):(\mathrm{n}-1)},e_{\boldsymbol{\delta}}^{(0):(\mathrm{n}-1)}\right)$ برقرار است. در نتیجه،

$$\mathbf{O}_{\mathrm{n}}\,\mathbf{x}'+\mathbf{W}_{\mathrm{n}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\delta}\\ \boldsymbol{\delta}^{(1)}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\delta}^{(\mathrm{n}-1)}\end{bmatrix}+\mathbf{E}_{\mathrm{n}}\begin{bmatrix}e\\ e^{(1)}\\ \vdots\\ e^{(\mathrm{n}-1)}\end{bmatrix}+\mathbf{E}_{\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{n}}}\begin{bmatrix}e_{\boldsymbol{\delta}}\\ e_{\boldsymbol{\delta}}^{(1)}\\ \vdots\\ e_{\boldsymbol{\delta}}^{(\mathrm{n}-1)}\end{bmatrix}=\mathbf{O}_{\mathrm{n}}\,\mathbf{x}+\mathbf{W}_{\mathrm{n}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\delta}\\ \boldsymbol{\delta}^{(1)}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\delta}^{(\mathrm{n}-1)}\end{bmatrix}+\mathbf{E}_{\mathrm{n}}\begin{bmatrix}e\\ e^{(1)}\\ \vdots\\ e^{(\mathrm{n}-1)}\end{bmatrix}+\mathbf{E}_{\boldsymbol{\delta}_{\mathrm{n}}}\begin{bmatrix}e_{\boldsymbol{\delta}}\\ e_{\boldsymbol{\delta}}^{(1)}\\ \vdots\\ e_{\boldsymbol{\delta}}^{(\mathrm{n}-1)}\end{bmatrix} \tag{پ-۵۸}$$

بنابراین نتیجه می‌شود که $\mathbf{O}_{\mathrm{n}}\left(\mathbf{x}'-\mathbf{x}\right)=\mathbf{0}$ است؛ یعنی رنک ماتریس $\mathbf{O}_{\mathrm{n}}$ کامل نیست؛ که بیـانگر تضـاد است. لذا، سیستم خطی پیوسته مشاهده‌پذیر متغیر حالت در حضور خطای خطی‌سازی است.

اثبات قضیه ۶ (مشاهده‌پذیری ورودی‌های نامعلوم در حضور ماتریس متغیر با زمان ورودی‌های نامعلوم): در این بخش اثبات قضیه ۶ مرتبط با شرایط مشاهده‌پذیری متغیرهای حالت در حضور ماتریس متغیر با زمان ورودی‌های نامعلوم برای یک سیستم خطی پیوسته زمان بیان می‌شود.

شرط لازم: خروجی سیستم و مشتقات آن تا مرتبه i–ام برای یک سیستم خطی در حضور ماتریس متغیر با زمان ورودی‌های نامعلوم برطبق معادلات (۲۶.۴) و (۲۷.۴) به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{cases} \mathbf{z} = \mathbf{C}\,\mathbf{x} + \mathbf{D}\boldsymbol{\delta} + \mathbf{D}_{\mathrm{d}}\,\mathbf{d} \\ \mathbf{z}^{(1)} = \mathbf{C}\,\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{CA}\,\mathbf{x} + \mathbf{CB}\,\boldsymbol{\delta} + \mathbf{D}\boldsymbol{\delta}^{(1)} + \mathbf{CB}_{\mathrm{d}}(t)\,\mathbf{d} + \mathbf{D}_{\mathrm{d}}\,\mathbf{d}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{z}^{(\mathrm{n}-1)} = \mathbf{CA}^{\mathrm{n}-1}\,\mathbf{x} + \mathbf{CA}^{\mathrm{n}-2}\mathbf{B}\,\boldsymbol{\delta} + \cdots + \mathbf{CB}\,\boldsymbol{\delta}^{(\mathrm{n}-2)} + \mathbf{D}\boldsymbol{\delta}^{(\mathrm{n}-1)} + \sum_{j=1}^{\mathrm{n}-1}\mathbf{CA}^{\mathrm{n}-1-j}\mathbf{B}_{\mathrm{d}}^{(j-1)}(t)\,\mathbf{d} \\ \quad + \cdots + \sum_{j=1}^{\mathrm{n}-1-m}\frac{(j+m-1)!}{(j-1)!m!}\mathbf{CA}^{\mathrm{n}-1-m-j}\mathbf{B}_{\mathrm{d}}^{(j-1)}(t)\,\mathbf{d}^{(m)} + \cdots + \mathbf{CB}_{\mathrm{d}}(t)\,\mathbf{d}^{(\mathrm{n}-2)} + \mathbf{D}_{\mathrm{d}}\,\mathbf{d}^{(\mathrm{n}-1)} \\ \vdots \\ \mathbf{z}^{(i)} = \mathbf{CA}^{i}\,\mathbf{x} + \mathbf{CA}^{i-1}\mathbf{B}\,\boldsymbol{\delta} + \cdots + \mathbf{D}\,\boldsymbol{\delta}^{(i)} + \sum_{j=1}^{i}\mathbf{CA}^{i-j}\mathbf{B}_{\mathrm{d}}^{(j-1)}(t)\,\mathbf{d} + \cdots + \\ \quad \sum_{j=1}^{i-m}\frac{(j+m-1)!}{(j-1)!m!}\mathbf{CA}^{i-m-j}\mathbf{B}_{\mathrm{d}}^{(j-1)}(t)\;\mathbf{d}^{(m)} + \cdots + \mathbf{D}_{\mathrm{d}}\,\mathbf{d}^{(i)} \end{cases} \tag{پ-۵۹}$$

در رابطه فوق، $\mathbf{d}^{(m)}$ بیانگر مشتق m–ام ورودی‌های نامعلوم، $\mathbf{d}$، نسبت به زمان به ازای $m=0,...,i-1$ هستند. معادله فوق در فرم ماتریس به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{z}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{z}^{(\mathrm{n})} \\ \vdots \\ \mathbf{z}^{(i)} \end{bmatrix} = \mathbf{O}_{0:i}\;\mathbf{x}_k \;+\; \mathbf{W}_{0:i}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta} \\ \boldsymbol{\delta}^{(1)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\delta}^{(\mathrm{n})} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\delta}^{(i)} \end{bmatrix} + \mathbf{O}_{\mathrm{d}_{0:i}}(t)\,\mathbf{d} + \mathbf{W}'_{\mathrm{d}_{0:i}}(t)\begin{bmatrix} \mathbf{d}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{d}^{(\mathrm{n})} \\ \vdots \\ \mathbf{d}^{(i)} \end{bmatrix} \tag{پ-۶۰}$$

جاییکه،

$$\mathbf{O}_{\mathrm{d}_{t_{0:i}}}=\begin{bmatrix}\mathbf{D_d}\\ \mathbf{CB}_{\mathrm{d}}(t)\\ \mathbf{CAB}_{\mathrm{d}}(t)+\mathbf{CAB}_{\mathrm{d}}^{(1)}(t)\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{\mathrm{n}-1}\mathbf{CA}^{\mathrm{n}-1-j}\mathbf{B}_{\mathrm{d}}^{(j-1)}(t)\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{i}\mathbf{CA}^{i-j}\mathbf{B}_{\mathrm{d}}^{(j-1)}(t)\end{bmatrix} \qquad \text{(پ-۶۱)}$$

$$\mathbf{W}'_{\mathrm{d}_{t_{0:i}}}=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0}\\ \mathbf{D_d} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0}\\ \mathbf{CB}_{\mathrm{d}}(t) & \mathbf{D_d} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \sum_{j=1}^{\mathrm{n}-2} j\,\mathbf{CA}^{\mathrm{n}-2-j}\mathbf{B}_{\mathrm{d}}^{(j-1)}(t) & \cdots & \sum_{j=1}^{\mathrm{n}-1-m}\frac{(j+m-1)!}{(j-1)!m!}\mathbf{CA}^{\mathrm{n}-1-m-j}\mathbf{B}_{\mathrm{d}}^{(j-1)}(t) & \ddots & \cdots & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \sum_{j=1}^{i-1} j\,\mathbf{CA}^{i-1-j}\mathbf{B}_{\mathrm{d}}^{(j-1)}(t) & \cdots & \sum_{j=1}^{i-m}\frac{(j+m-1)!}{(j-1)!m!}\mathbf{CA}^{i-m-j}\mathbf{B}_{\mathrm{d}}^{(j-1)}(t) & \cdots & \cdots & \mathbf{D_d}\end{bmatrix} \qquad \text{(پ-۶۲)}$$

معادله (پ-۶۰) به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{z}\\ \mathbf{z}^{(1)}\\ \vdots\\ \mathbf{z}^{(\mathrm{n})}\\ \vdots\\ \mathbf{z}^{(i)}\end{bmatrix}-\mathbf{O}_{0:i}\ \mathbf{x}-\mathbf{W}_{0:i}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\delta}\\ \boldsymbol{\delta}^{(1)}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\delta}^{(\mathrm{n})}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\delta}^{(i)}\end{bmatrix}=\mathbf{O}_{\mathrm{d}_{0:i}}(t)\,\mathbf{d}_k+\mathbf{W}'_{\mathrm{d}_{0:i}}(t)\begin{bmatrix}\mathbf{d}^{(1)}\\ \vdots\\ \mathbf{d}^{(\mathrm{n})}\\ \vdots\\ \mathbf{d}^{(i)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{O}_{\mathrm{d}_{0:i}}(t) & \mathbf{W}'_{\mathrm{d}_{0:i}}(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{d}\\ \mathbf{d}^{(1)}\\ \vdots\\ \mathbf{d}^{(\mathrm{n})}\\ \vdots\\ \mathbf{d}^{(i)}\end{bmatrix} \qquad \text{(پ-۶۳)}$$

از انجاکه، سمت چپ معادله فوق معلوم است؛ لذا برطبق قضیه ۱۵، که در پیوست"چ" بیان شده‌است، به‌منظور بازیابی ورودی‌های نامعلوم، $\mathbf{d}$، از سایر ورودی‌های نامعلوم دیگر، $\mathbf{d}^{(1)},\ldots,\mathbf{d}^{(i)}$، ستون‌های ماتریس $\mathbf{O}_{\mathrm{d}_{0:i}}(t)$ باید مستقل خطی از ستون‌های ماتریس $\mathbf{W}'_{\mathrm{d}_{0:i}}(t)$ باشد؛ یعنی:

$$\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix}\mathbf{O}_{\mathrm{d}_{0:i}}(t) & \mathbf{W}'_{\mathrm{d}_{0:i}}(t)\end{bmatrix}\right)=\operatorname{rank}\left(\mathbf{O}_{\mathrm{d}_{0:i}}(t)\right)+\operatorname{rank}\left(\mathbf{W}'_{\mathrm{d}_{0:i}}(t)\right) \qquad \text{(پ-۶۴)}$$

همچنین، رنک ماتریس $\mathbf{O}_{\mathrm{d}_{0:i}}(t)$ به‌منظور تعیین ورودی‌های نامعلوم باید کامل باشد؛ یعنی:

$$\operatorname{rank}\left(\mathbf{O}_{\mathrm{d}_{0:i}}(t)\right)=\mathrm{n_d} \qquad \text{(پ-۶۵)}$$

بنابراین،

$$\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix}\mathbf{O}_{\mathrm{d}_{0:i}}(t) & \mathbf{W}'_{\mathrm{d}_{0:i}}(t)\end{bmatrix}\right)=\mathrm{n_d}+\operatorname{rank}\left(\mathbf{W}'_{\mathrm{d}_{0:i}}(t)\right) \qquad \text{(پ-۶۶)}$$

بر مبنای قضیه کیلی-همیلتون، شرایط قبلی به‌ازای $i = 0, 1, ..., \mathrm{n}$ معتبر است. در نتیجه، ابعاد ماتریس‌های $\mathbf{O}_{\mathrm{d}_{0:i}}(t)$ و $\mathbf{W}'_{\mathrm{d}_{0:i}}(t)$ به‌صورت زیر کاهش می‌یابند:

$$\mathbf{O}_{\mathbf{d}_t}=\begin{bmatrix}\mathbf{D_d}\\ \mathbf{CB}_{\mathrm{d}}(t)\\ \mathbf{CAB}_{\mathrm{d}}(t)+\mathbf{CAB}_{\mathrm{d}}^{(1)}(t)\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{\mathrm{n}-1}\mathbf{CA}^{\mathrm{n}-1-j}\mathbf{B}_{\mathrm{d}}^{(j-1)}(t)\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{i}\mathbf{CA}^{i-j}\mathbf{B}_{\mathrm{d}}^{(j-1)}(t)\end{bmatrix} \qquad \text{(پ-۶۷)}$$

$$\mathbf{W}'_{\mathbf{d}_t}=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \mathbf{D_d} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \mathbf{CB}_{\mathrm{d}}(t) & \mathbf{D_d} & \cdots & \mathbf{0}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \sum_{j=1}^{\mathrm{n}-2} j\,\mathbf{CA}^{\mathrm{n}-2-j}\mathbf{B}_{\mathrm{d}}^{(j-1)}(t) & \cdots & \sum_{j=1}^{\mathrm{n}-1-m}\frac{(j+m-1)!}{(j-1)!m!}\mathbf{CA}^{\mathrm{n}-1-m-j}\mathbf{B}_{\mathrm{d}}^{(j-1)}(t) & \mathbf{D_d}\end{bmatrix} \qquad \text{(پ-۶۸)}$$

شرط کافی: با درنظرگرفتن معادلات (پ-۶۵) و (پ-۶۶)، بر مبنای تضاد فرض می‌شود که سیستم مشاهده‌پذیر متغیر حالت در حضور خطاهای خطی‌سازی نیست. به عبارت دیگر، $\mathbf{d}'$ غیرقابل تشخیص از $\mathbf{d}$ است؛ لذا $\mathbf{z}^{(0):(\mathrm{n})}\left(\mathbf{d}',\mathbf{x},\boldsymbol{\delta}^{(0):(\mathrm{n})},\mathbf{d}^{(1):(\mathrm{n})}\right)=\mathbf{z}^{(0):(\mathrm{n})}\left(\mathbf{d},\mathbf{x},\boldsymbol{\delta}^{(0):(\mathrm{n})},\mathbf{d}^{(1):(\mathrm{n})}\right)$ برقرار است. در نتیجه،

$$\mathbf{O_d}(t)\mathbf{d}'+\mathbf{O}_{\mathrm{n}+1}\mathbf{x}+\mathbf{W}_{\mathrm{n}+1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\delta}\\ \boldsymbol{\delta}^{(1)}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\delta}^{(\mathrm{n})}\end{bmatrix}+\mathbf{W}'_{\mathbf{d}}(t)\begin{bmatrix}\mathbf{d}^{(1)}\\ \mathbf{d}^{(2)}\\ \vdots\\ \mathbf{d}^{(\mathrm{n})}\end{bmatrix}=\mathbf{O_d}(t)\mathbf{d}+\mathbf{O}_{\mathrm{n}+1}\mathbf{x}+\mathbf{W}_{\mathrm{n}+1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\delta}\\ \boldsymbol{\delta}^{(1)}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\delta}^{(\mathrm{n})}\end{bmatrix}+\mathbf{W}'_{\mathbf{d}}(t)\begin{bmatrix}\mathbf{d}^{(1)}\\ \mathbf{d}^{(2)}\\ \vdots\\ \mathbf{d}^{(\mathrm{n})}\end{bmatrix} \qquad \text{(پ-۶۹)}$$

بنابراین نتیجه می‌شود که $\mathbf{O_d}(t)(\mathbf{d}'-\mathbf{d})=\mathbf{0}$ است؛ یعنی رنک ماتریس $\mathbf{O_d}(t)$ کامل نیست؛ که بیانگر تضاد است. لذا، سیستم خطی پیوسته زمان مشاهده‌پذیر ورودی‌های نامعلوم در حضور ماتریس متغیر با زمان ورودی‌های نامعلوم است.

پیوست ث: اثبات قضایای مشاهده‌پذیری برای سیستم‌های خطی گسسته زمان

اثبات قضیه ۸ (مشاهده‌پذیری قوی): در این بخش اثبات قضیه ۸ مرتبط با شرایط مشاهده‌پذیری قوی برای یک سیستم خطی گسسته زمان بیان می‌شود [۹۸].

شرط لازم: خروجی‌های سیستم در گام زمانی k تا $k+\tau$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{cases} \mathbf{z}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{D}\boldsymbol{\delta}_k + \mathbf{D_d}\mathbf{d}_k \\ \mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{C}\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{D}\boldsymbol{\delta}_{k+1} + \mathbf{D_d}\mathbf{d}_{k+1} = \mathbf{CA}\mathbf{x}_k + \mathbf{CB}\boldsymbol{\delta}_k + \mathbf{CB_d}\mathbf{d}_k + \mathbf{D}\boldsymbol{\delta}_{k+1} + \mathbf{D_d}\mathbf{d}_{k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{z}_{k+(n-1)} = \mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{x}_k + \mathbf{CA}^{n-2}\mathbf{B}\boldsymbol{\delta}_k + \cdots + \mathbf{D}\boldsymbol{\delta}_{k+(n-1)} + \mathbf{CA}^{n-2}\mathbf{B_d}\mathbf{d}_k + \cdots + \mathbf{D_d}\mathbf{d}_{k+(n-1)} \\ \vdots \\ \mathbf{z}_{k+\tau} = \mathbf{CA}^{\tau}\mathbf{x}_k + \mathbf{CA}^{\tau-1}\mathbf{B}\boldsymbol{\delta}_k + \cdots + \mathbf{D}\boldsymbol{\delta}_{k+\tau} + \mathbf{CA}^{\tau-1}\mathbf{B_d}\mathbf{d}_k + \cdots + \mathbf{D_d}\mathbf{d}_{k+\tau} \end{cases} \tag{پ-۷۰}$$

معادله فوق می‌تواند به فرم ماتریسی زیر بیان شود:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z}_k \\ \mathbf{z}_{k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{z}_{k+(n-1)} \\ \vdots \\ \mathbf{z}_{k+\tau} \end{bmatrix} = \mathbf{O}_{0:\tau}\mathbf{x}_k + \mathbf{W}_{0:\tau}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_k \\ \boldsymbol{\delta}_{k+1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\delta}_{k+(n-1)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\delta}_{k+\tau} \end{bmatrix} + \mathbf{W}_{\mathbf{d}_{0:\tau}}\begin{bmatrix} \mathbf{d}_k \\ \mathbf{d}_{k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{k+(n-1)} \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{k+\tau} \end{bmatrix} \tag{پ-۷۱}$$

جاییکه؛

$$\mathbf{O}_{0:\tau} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{\tau} \end{bmatrix} \tag{پ-۷۲}$$

$$\mathbf{W}_{0:\tau} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CB} & \mathbf{D} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CAB} & \mathbf{CB} & \mathbf{D} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-2}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{n-3}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{n-4}\mathbf{B} & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{\tau-1}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{\tau-2}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{\tau-3}\mathbf{B} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad \text{(پ-۷۳)}$$

$$\mathbf{W}_{\mathbf{d}_{0:\tau}} = \begin{bmatrix} \mathbf{D_d} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CB_d} & \mathbf{D_d} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CAB_d} & \mathbf{CB_d} & \mathbf{D_d} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-2}\mathbf{B_d} & \mathbf{CA}^{n-3}\mathbf{B_d} & \mathbf{CA}^{n-4}\mathbf{B_d} & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{\tau-1}\mathbf{B_d} & \mathbf{CA}^{\tau-2}\mathbf{B_d} & \mathbf{CA}^{\tau-3}\mathbf{B_d} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{D_d} \end{bmatrix} \quad \text{(پ-۷۴)}$$

معادله فوق به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z}_k \\ \mathbf{z}_{k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{z}_{k+(n-1)} \\ \vdots \\ \mathbf{z}_{k+\tau} \end{bmatrix} - \mathbf{W}_{0:\tau} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_k \\ \boldsymbol{\delta}_{k+1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\delta}_{k+(n-1)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\delta}_{k+\tau} \end{bmatrix} = \mathbf{O}_{0:\tau}\,\mathbf{x}_k + \mathbf{W}_{\mathbf{d}_{0:\tau}} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_k \\ \mathbf{d}_{k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{k+(n-1)} \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{k+\tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{0:\tau} & \mathbf{W}_{\mathbf{d}_{0:\tau}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{d}_k \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{k+(n-1)} \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{k+\tau} \end{bmatrix} \quad \text{(پ-۷۵)}$$

از آنجا که، ورودی‌های سیستم و مشاهدات معلوم هستند؛ سمت چپ معادله فوق معلوم است. بنـابراین، بر طبق قضیه ۱۵، که در پیوست "چ" بیان شده‌است، به‌منظور بازیـابی بـردار متغیرهـای حالـت، $\mathbf{x}_k$، از دنباله ورودی‌های نامعلوم، $\mathbf{d}_k,...,\mathbf{d}_{k+\tau}$، ستون‌های ماتریس $\mathbf{O}_{0:\tau}$ باید مستقل خطی از ستون‌های $\mathbf{W}_{\mathbf{d}_{0:\tau}}$ باشد؛ یعنی:

$$\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{O}_{0:\tau} & \mathbf{W}_{\mathbf{d}_{0:\tau}} \end{bmatrix}\right) = \operatorname{rank}\left(\mathbf{O}_{0:\tau}\right) + \operatorname{rank}\left(\mathbf{W}_{\mathbf{d}_{0:\tau}}\right) \quad \text{(پ-۷۶)}$$

همچنین، به‌منظور بازیابی متغیرهای حالت، $\mathbf{x}_k$، رنک ماتریس $\mathbf{O}_{0:\tau}$ باید کامل باشد. یعنی:

$$\operatorname{rank}\left(\mathbf{O}_{0:\tau}\right) = n \quad \text{(پ-۷۷)}$$

بنابراین،

$$\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{O}_{0:\tau} & \mathbf{W}_{\mathbf{d}_{0:\tau}} \end{bmatrix}\right) = n + \operatorname{rank}\left(\mathbf{W}_{\mathbf{d}_{0:\tau}}\right) \quad \text{(پ-۷۸)}$$

بر مبنای قضیه کیلی-همیلتون [۱۷۲]، توان‌های $\mathbf{A}^t$ با $t \geq \mathrm{n}$ می‌تواند به‌صورت ترکیب خطی $\mathbf{I}, \mathbf{A}, \ldots, \mathbf{A}^{\mathrm{n}-1}$ بیان شود. بنابراین، شرایط قبل به ازای $t = \mathrm{n}-1$ معتبر است. در نتیجه، ماتریس‌های $\mathbf{O}_{0:\tau}$، $\mathbf{W}_{0:\tau}$ و $\mathbf{W}_{\mathbf{d}_{0:\tau}}$ به‌صورت زیر کاهش می‌یابد:

$$\mathbf{O}_{\mathrm{n}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{\mathrm{n}-1} \end{bmatrix} \tag{پ-۷۹}$$

$$\mathbf{W}_{\mathrm{n}} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CB} & \mathbf{D} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CAB} & \mathbf{CB} & \mathbf{D} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{\mathrm{n}-2}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{\mathrm{n}-3}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{\mathrm{n}-4}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{D} \end{bmatrix} \tag{پ-۸۰}$$

$$\mathbf{W}_{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{\mathbf{d}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CB}_{\mathbf{d}} & \mathbf{D}_{\mathbf{d}} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CAB}_{\mathbf{d}} & \mathbf{CB}_{\mathbf{d}} & \mathbf{D}_{\mathbf{d}} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{\mathrm{n}-2}\mathbf{B}_{\mathbf{d}} & \mathbf{CA}^{\mathrm{n}-3}\mathbf{B}_{\mathbf{d}} & \mathbf{CA}^{\mathrm{n}-4}\mathbf{B}_{\mathbf{d}} & \cdots & \mathbf{D}_{\mathbf{d}} \end{bmatrix} \tag{پ-۸۱}$$

شرط کافی: با درنظرگرفتن معادلات (پ-۷۷) و (پ-۷۸)، بر مبنای تضاد فرض می‌شود که سیستم مشاهده پذیر قوی نیست. به عبارت دیگر، $\mathbf{x}'_k$ غیرقابل تشخیص از $\mathbf{x}_k$ است؛ به‌گونه‌ای که $\mathbf{z}_{k:k+(\mathrm{n}-1)}\left(\mathbf{x}'_k, \boldsymbol{\delta}_{k:k+(\mathrm{n}-1)}, \mathbf{d}_{k:k+(\mathrm{n}-1)}\right) = \mathbf{z}_{k:k+(\mathrm{n}-1)}\left(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\delta}_{k:k+(\mathrm{n}-1)}, \mathbf{d}_{k:k+(\mathrm{n}-1)}\right)$ برقرار باشد. در نتیجه،

$$\mathbf{O}_{\mathrm{n}}\mathbf{x}'_k + \mathbf{W}_{\mathbf{d}}\begin{bmatrix} \mathbf{d}_k \\ \mathbf{d}_{k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{k+(\mathrm{n}-1)} \end{bmatrix} + \mathbf{W}_{\mathrm{n}}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_k \\ \boldsymbol{\delta}_{k+1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\delta}_{k+(\mathrm{n}-1)} \end{bmatrix} = \mathbf{O}_{\mathrm{n}}\mathbf{x}_k + \mathbf{W}_{\mathbf{d}}\begin{bmatrix} \mathbf{d}_k \\ \mathbf{d}_{k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{k+(\mathrm{n}-1)} \end{bmatrix} + \mathbf{W}_{\mathrm{n}}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_k \\ \boldsymbol{\delta}_{k+1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\delta}_{k+(\mathrm{n}-1)} \end{bmatrix} \tag{پ-۸۲}$$

بنابراین نتیجه می‌شود که $\mathbf{O}_{\mathrm{n}}\left(\mathbf{x}'_k - \mathbf{x}_k\right) = \mathbf{0}$ است؛ یعنی رنک ماتریس $\mathbf{O}_{\mathrm{n}}$ کامل نیست؛ که بیانگر تضاد است. لذا، سیستم خطی گسسته زمان مشاهده‌پذیر قوی است.

اثبات قضیه ۹ (مشاهده‌پذیری ورودی‌های نامعلوم): در این بخش اثبات قضیه ۹ مرتبط بـا شـرایط مشاهده‌پذیری ورودی‌های نامعلوم برای یک سیستم خطی گسسته زمان بیان می‌شود.

شرط لازم: خروجی‌های سیستم در گام‌های زمانی k تا k+τ بر طبق معادله (پ-۷۵) بـا پارتیشـن‌بندی $\mathbf{W}_{\mathbf{d}_i} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{\mathrm{d}_i} & \mathbf{W}'_{\mathbf{d}_i} \end{bmatrix}$ به‌صورت زیر در فرم ماتریسی بیان می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z}_k \\ \mathbf{z}_{k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{z}_{k+\mathrm{n}} \\ \vdots \\ \mathbf{z}_{k+\tau} \end{bmatrix} = \mathbf{O}_{0:\tau}\ \mathbf{x}_k + \mathbf{W}_{0:\tau} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_k \\ \boldsymbol{\delta}_{k+1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\delta}_{k+\mathrm{n}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\delta}_{k+\tau} \end{bmatrix} + \mathbf{O}_{\mathrm{d}_{0:\tau}}\ \mathbf{d}_k + \mathbf{W}'_{\mathbf{d}_{0:\tau}} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{k+\mathrm{n}} \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{k+\tau} \end{bmatrix} \qquad (پ-۸۳)$$

جاییکه؛

$$\mathbf{O}_{\mathrm{d}_{0:\tau}} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_\mathbf{d} \\ \mathbf{C}\mathbf{B}_\mathbf{d} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B}_\mathbf{d} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{\mathrm{n}-1}\mathbf{B}_\mathbf{d} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{\tau-1}\mathbf{B}_\mathbf{d} \end{bmatrix}; \mathbf{W}'_{\mathbf{d}_{0:\tau}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_\mathbf{d} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}\mathbf{B}_\mathbf{d} & \mathbf{D}_\mathbf{d} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{\mathrm{n}-2}\mathbf{B}_\mathbf{d} & \mathbf{C}\mathbf{A}^{\mathrm{n}-3}\mathbf{B}_\mathbf{d} & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{\tau-2}\mathbf{B}_\mathbf{d} & \mathbf{C}\mathbf{A}^{\tau-3}\mathbf{B}_\mathbf{d} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{D}_\mathbf{d} \end{bmatrix} \qquad (پ-۸۴)$$

معادله فوق به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z}_k \\ \mathbf{z}_{k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{z}_{k+\mathrm{n}} \\ \vdots \\ \mathbf{z}_{k+\tau} \end{bmatrix} - \mathbf{O}_{0:\tau}\ \mathbf{x}_k - \mathbf{W}_{0:\tau} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_k \\ \boldsymbol{\delta}_{k+1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\delta}_{k+\mathrm{n}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\delta}_{k+\tau} \end{bmatrix} = \mathbf{O}_{\mathrm{d}_{0:\tau}}\ \mathbf{d}_k + \mathbf{W}'_{\mathbf{d}_{0:\tau}} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{k+\mathrm{n}} \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{k+\tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{\mathrm{d}_{0:\tau}} & \mathbf{W}'_{\mathbf{d}_{0:\tau}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_k \\ \mathbf{d}_{k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{k+\mathrm{n}} \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{k+\tau} \end{bmatrix} \qquad (پ-۸۵)$$

سمت چپ معادله فوق معلوم است. بنابراین، به‌منظور بازیابی ورودی‌های نامعلوم $\mathbf{d}_k$ در گام زمانی k، از دنباله سایر ورودی‌های نامعلوم، $\mathbf{d}_{k+1},...,\mathbf{d}_{k+\tau}$، بر طبق قضیه ۱۵، که در پیوست "چ" بیان شده‌است، باید ستون‌های ماتریس $\mathbf{O}_{d_{0:\tau}}$ مستقل خطی از ستون‌های $\mathbf{W}'_{\mathbf{d}_{0:\tau}}$ باشد؛ یعنی:

$$\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix}\mathbf{O}_{d_{0:\tau}} & \mathbf{W}'_{\mathbf{d}_{0:\tau}}\end{bmatrix}\right)=\operatorname{rank}\left(\mathbf{O}_{d_{0:\tau}}\right)+\operatorname{rank}\left(\mathbf{W}'_{\mathbf{d}_{0:\tau}}\right) \tag{پ-۸۶}$$

همچنین، به‌منظور بازیابی ورودی نامعلوم، $\mathbf{d}_k$، رنک ستونی ماتریس $\mathbf{O}_{d_{0:\tau}}$ باید کامل باشد. یعنی:

$$\operatorname{rank}\left(\mathbf{O}_{d_{0:\tau}}\right)=n_d \tag{پ-۸۷}$$

بنابراین،

$$\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix}\mathbf{O}_{d_{0:\tau}} & \mathbf{W}'_{\mathbf{d}_{0:\tau}}\end{bmatrix}\right)=n_d+\operatorname{rank}\left(\mathbf{W}'_{\mathbf{d}_{0:\tau}}\right) \tag{پ-۸۸}$$

بر مبنای قضیه کیلی-همیلتون [۱۷۲]، توان‌های $\mathbf{A}^t$ با $t \geq n$ می‌توانند به‌صورت ترکیب خطی $\mathbf{I},\mathbf{A},...,\mathbf{A}^{n-1}$ بیان شود. بنابراین، شرایط قبل به ازای $t=0,1,...,n$ معتبر است. در نتیجه، ماتریس‌های $\mathbf{O}_{d_{0:\tau}}$، $\mathbf{W}_{0:\tau}$ و $\mathbf{W}'_{\mathbf{d}_{0:\tau}}$ به‌صورت زیر کاهش می‌یابد:

$$\mathbf{O}_{\mathbf{d}}=\begin{bmatrix}\mathbf{D}_{\mathbf{d}}\\ \mathbf{CB}_{\mathbf{d}}\\ \mathbf{CAB}_{\mathbf{d}}\\ \vdots\\ \mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{B}_{\mathbf{d}}\end{bmatrix} \tag{پ-۸۹}$$

$$\mathbf{W}_{n+1}=\begin{bmatrix}\mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \mathbf{CB} & \mathbf{D} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \mathbf{CAB} & \mathbf{CB} & \mathbf{D} & \cdots & \mathbf{0}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{n-2}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{n-3}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{D}\end{bmatrix} \tag{پ-۹۰}$$

$$\mathbf{W}'_{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{D_d} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CB_d} & \mathbf{D_d} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{\mathrm{n}-2}\mathbf{B_d} & \mathbf{CA}^{\mathrm{n}-3}\mathbf{B_d} & \cdots & \mathbf{D_d} \end{bmatrix} \qquad \text{(پ-۹۱)}$$

اینجا، $\mathbf{O_d}$ و $\mathbf{W}'_{\mathbf{d}}$ به‌ترتیب بیانگر ماتریس مشاهده‌پذیری ورودی نامعلوم و ماتریس معکوس‌پذیری در گام‌های زمانی k+1 تا k+n برای چهارگانه $(\mathbf{A}, \mathbf{B_d}, \mathbf{C}, \mathbf{D_d})$ هستند.

شرط کافی: با درنظرگرفتن معادلات (پ-۸۷) و (پ-۸۸)، بر مبنای تضاد فرض می‌شود که سیستم مشاهده‌پذیر ورودی نامعلوم نیست. به عبارت دیگر، $\mathbf{d}'_k$ غیرقابل تشخیص از $\mathbf{d}_k$ است؛ به‌گونه‌ای که $\mathbf{z}_{k:k+\mathrm{n}}\left(\mathbf{d}'_k, \mathbf{x}_k, \boldsymbol{\delta}_{k:k+\mathrm{n}}, \mathbf{d}_{k+1:k+\mathrm{n}}\right) = \mathbf{z}_{k:k+\mathrm{n}}\left(\mathbf{d}_k, \mathbf{x}_k, \boldsymbol{\delta}_{k:k+\mathrm{n}}, \mathbf{d}_{k+1:k+\mathrm{n}}\right)$ برقرار باشد. در نتیجه،

$$\mathbf{O_d}\,\mathbf{d}'_k + \mathbf{O}_{\mathrm{n}+1}\mathbf{x}_k + \mathbf{W}_{\mathrm{n}+1}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_k \\ \boldsymbol{\delta}_{k+1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\delta}_{k+\mathrm{n}} \end{bmatrix} + \mathbf{W}'_{\mathbf{d}}\begin{bmatrix} \mathbf{d}_{k+1} \\ \mathbf{d}_{k+2} \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{k+\mathrm{n}} \end{bmatrix} = \mathbf{O_d}\mathbf{d}_k + \mathbf{O}_{\mathrm{n}+1}\mathbf{x}_k + \mathbf{W}_{\mathrm{n}+1}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_k \\ \boldsymbol{\delta}_{k+1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\delta}_{k+\mathrm{n}} \end{bmatrix} + \mathbf{W}'_{\mathbf{d}}\begin{bmatrix} \mathbf{d}_{k+1} \\ \mathbf{d}_{k+2} \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{k+\mathrm{n}} \end{bmatrix} \qquad \text{(پ-۹۲)}$$

جاییکه؛

$$\mathbf{O}_{\mathrm{n}+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{\mathrm{n}} \end{bmatrix} \qquad \text{(پ-۹۳)}$$

بنابراین نتیجه می‌شود که $\mathbf{O_d}\left(\mathbf{d}'_k - \mathbf{d}_k\right) = \mathbf{0}$ است؛ یعنی رنک ماتریس $\mathbf{O_d}$ کامل نیست؛ که بیانگر تضاد است. لذا، سیستم خطی گسسته زمان مشاهده‌پذیر ورودی نامعلوم است.

اثبات قضیه ۱۰ (مشاهده‌پذیری توأمان متغیرهای حالت و ورودی‌های نـامعلوم): در ایـن بخـش اثبات قضیه ۱۰ مرتبط با شرایط مشاهده‌پذیری توأمان متغیرهای حالت و ورودی‌های نامعلوم برای یـک سیستم خطی گسسته زمان بیان می‌شود.

شرط لازم: خروجی‌های سیستم در گام‌های زمانی k تا $k+t$ بر طبق معادلـه (پ-۸۵) به‌صـورت زیـر در فرم ماتریسی بیان می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z}_k \\ \mathbf{z}_{k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{z}_{k+\mathrm{n}} \\ \vdots \\ \mathbf{z}_{k+\tau} \end{bmatrix} - \mathbf{W}_{0:\tau} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_k \\ \boldsymbol{\delta}_{k+1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\delta}_{k+\mathrm{n}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\delta}_{k+\tau} \end{bmatrix} = \mathbf{O}_{\mathrm{nd}_{0:\tau}} \mathbf{x}_{\mathrm{a}_k} + \mathbf{W}'_{\mathbf{d}_{0:\tau}} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{k+\mathrm{n}} \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{k+\tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{\mathrm{nd}_{0:\tau}} & \mathbf{W}'_{\mathbf{d}_{0:\tau}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\mathrm{a}_k} \\ \mathbf{d}_{k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{k+\mathrm{n}} \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{k+t} \end{bmatrix} \qquad \text{(پ-۹۴)}$$

در رابطه فوق، $\mathbf{O}_{\mathrm{nd}_{0:\tau}} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{0:\tau} & \mathbf{O}_{\mathrm{d}_{0:\tau}} \end{bmatrix}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{O}_{\mathrm{nd}_{0:\tau}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D}_\mathbf{d} \\ \mathbf{CA} & \mathbf{CB}_\mathbf{d} \\ \mathbf{CA}^2 & \mathbf{CAB}_\mathbf{d} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{\mathrm{n}} & \mathbf{CA}^{\mathrm{n}-1}\mathbf{B}_\mathbf{d} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{\tau} & \mathbf{CA}^{\tau-1}\mathbf{B}_\mathbf{d} \end{bmatrix} \qquad \text{(پ-۹۵)}$$

از آنجاکه، ورودی‌های سیستم و مشاهدات معلوم هسـتند؛ لـذا سـمت چـپ معادلـه فـوق معلـوم اسـت. بنابراین، متغیرهای حالت افزونه $\mathbf{x}_{\mathrm{a}_k}$ می‌تواند به‌صورت یکتا از معادله (پ-۹۴) بازیابی شـود؛ اگـر رنـک ستونی ماتریس $\mathbf{O}_{\mathrm{nd}_{0:\tau}}$ کامل باشد. یعنی:

$$\mathrm{rank}\left(\mathbf{O}_{\mathrm{nd}_{0:\tau}}\right) = \mathrm{n} + \mathrm{n}_{\mathrm{d}} \qquad \text{(پ-۹۶)}$$

همچنین، ستون‌های ماتریس $\mathbf{O}_{\mathrm{nd}_{0:\tau}}$ باید مستقل خطی از ستون‌های ماتریس $\mathbf{W}'_{\mathbf{d}_{0:\tau}}$ باشد؛ یعنی:

$$\text{rank}\left(\begin{bmatrix}\mathbf{O}_{\text{nd}_{0:\tau}} & \mathbf{W}'_{\mathbf{d}_{0:\tau}}\end{bmatrix}\right)=\text{rank}\left(\mathbf{O}_{\text{nd}_{0:\tau}}\right)+\text{rank}(\mathbf{W}'_{\mathbf{d}_{0:\tau}}) \quad \text{(پ-۹۷)}$$

بنابراین،

$$\text{rank}\left(\begin{bmatrix}\mathbf{O}_{\text{nd}_{0:\tau}} & \mathbf{W}'_{\mathbf{d}_{0:\tau}}\end{bmatrix}\right)=\text{n+n}_{\text{d}}+\text{rank}(\mathbf{W}'_{\mathbf{d}_{0:\tau}}) \quad \text{(پ-۹۸)}$$

بر مبنای قضیه کیلی-همیلتون، شرایط بیان‌شـده بـه ازای $t=0, 1, \ldots, \text{n}$ معتبـر اسـت. در نتیجـه، ماتریس $\mathbf{O}_{\text{nd}_{0:\tau}}$ به‌صورت زیر کاهش می‌یابد:

$$\mathbf{O}_{\text{nd}}=\begin{bmatrix}\mathbf{C} & \mathbf{D}_{\mathbf{d}}\\ \mathbf{CA} & \mathbf{CB}_{\mathbf{d}}\\ \mathbf{CA}^2 & \mathbf{CAB}_{\mathbf{d}}\\ \vdots & \vdots\\ \mathbf{CA}^{\text{n}} & \mathbf{CA}^{\text{n}-1}\mathbf{B}_{\mathbf{d}}\end{bmatrix} \quad \text{(پ-۹۹)}$$

در رابطه فوق، $\mathbf{O}_{\text{nd}}=\begin{bmatrix}\mathbf{O}_{\text{n}} & \mathbf{O}_{\text{d}}\end{bmatrix}$ بیانگر ماتریس مشاهده پذیری متغیر حالت افزونه است.

شرط کافی: با درنظرگرفتن معادلات (پ-۹۶) و (پ-۹۷)، بر مبنای تضاد فـرض می‌شـود کـه سیسـتم مشاهده‌پذیر توامان متغیر حالت و ورودی نامعلوم نیست. به عبارت دیگر، $\mathbf{x}'_{\text{a}_k}$ غیرقابل تشـخیص از $\mathbf{x}_{\text{a}_k}$ است؛ لذا $\mathbf{z}_{k:k+\text{n}}\left(\mathbf{x}'_{\text{a}_k},\boldsymbol{\delta}_{k:k+\text{n}},\mathbf{d}_{k+1:k+\text{n}}\right)=\mathbf{z}_{k:k+\text{n}}\left(\mathbf{x}_{\text{a}_k},\boldsymbol{\delta}_{k:k+\text{n}},\mathbf{d}_{k+1:k+\text{n}}\right)$ برقرار است. در نتیجه،

$$\mathbf{O}_{\text{nd}}\,\mathbf{x}'_{\text{a}}+\mathbf{W}_{\text{n+1}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\delta}_k\\ \boldsymbol{\delta}_{k+1}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\delta}_{k+\text{n}}\end{bmatrix}+\mathbf{W}'_{\mathbf{d}}\begin{bmatrix}\mathbf{d}_{k+1}\\ \mathbf{d}_{k+2}\\ \vdots\\ \mathbf{d}_{k+\text{n}}\end{bmatrix}=\mathbf{O}_{\text{nd}}\,\mathbf{x}_{\text{a}}+\mathbf{W}_{\text{n+1}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\delta}_k\\ \boldsymbol{\delta}_{k+1}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\delta}_{k+\text{n}}\end{bmatrix}+\mathbf{W}'_{\mathbf{d}}\begin{bmatrix}\mathbf{d}_{k+1}\\ \mathbf{d}_{k+2}\\ \vdots\\ \mathbf{d}_{k+\text{n}}\end{bmatrix} \quad \text{(پ-۱۰۰)}$$

بنابراین نتیجه می‌شود که $\mathbf{O}_{\text{nd}}\left(\mathbf{x}'_{\text{a}}-\mathbf{x}_{\text{a}}\right)=\mathbf{0}$ است؛ یعنی رنک ماتریس $\mathbf{O}_{\text{nd}}$ کامل نیسـت؛ کـه بیـانگر تضاد است. لذا، سیستم خطی گسسته زمان مشاهده‌پذیر توأمان متغیر حالت و ورودی نامعلوم است.

پیوست ج: اثبات قضایای مشاهده‌پذیری برای سیستم‌های پیوسته غیرخطی افاین

اثبات قضیه ۱۱ (مشاهده‌پذیری متغیرهای حالت): در این بخش اثبات قضیه ۱۱ مرتبط با شرط مشاهده‌پذیری متغیرهای حالت برای یک سیستم غیرخطی پیوسته زمان در حالت افاین بیان می‌شود.

اثبات: خروجی سیستم و مشتقات خروجی تا مرتبه i-ام به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{cases} \mathbf{z} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{f}}^{0}(\mathbf{h}(\mathbf{x})) \\ \mathbf{z}^{(1)} = \dfrac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \dfrac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f} = L_{\mathbf{f}}^{1}(\mathbf{h}(\mathbf{x})) \\ \mathbf{z}^{(2)} = \dfrac{\partial \mathbf{z}^{(1)}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = L_{\mathbf{f}}^{2}(\mathbf{h}(\mathbf{x})) \\ \mathbf{z}^{(3)} = \dfrac{\partial \mathbf{z}^{(2)}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = L_{\mathbf{f}}^{3}(\mathbf{h}(\mathbf{x})) \\ \vdots \\ \mathbf{z}^{(\mathrm{n}-1)} = L_{\mathbf{f}}^{\mathrm{n}-1}(\mathbf{h}(\mathbf{x})) \\ \vdots \\ \mathbf{z}^{(i)} = L_{\mathbf{f}}^{i}(\mathbf{h}(\mathbf{x})) \end{cases} \qquad (\text{پ-۱۰۱})$$

معادله فوق به‌صورت زیر در فرم ماتریسی نوشته شود:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{z}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{z}^{(\mathrm{n}-1)} \\ \vdots \\ \mathbf{z}^{(i)} \end{bmatrix} = \mathbf{l}_{i+1}(\mathbf{x}) \qquad (\text{پ-۱۰۲})$$

در رابطه فوق، $\mathbf{l}_{i+1}(\mathbf{x})$ به‌صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$\mathbf{l}_{i+1}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} L_{\mathbf{f}}^{0}(\mathbf{h}(\mathbf{x})) \\ L_{\mathbf{f}}^{1}(\mathbf{h}(\mathbf{x})) \\ \vdots \\ L_{\mathbf{f}}^{\mathrm{n}-1}(\mathbf{h}(\mathbf{x})) \\ \vdots \\ L_{\mathbf{f}}^{i}(\mathbf{h}(\mathbf{x})) \end{bmatrix} \qquad (\text{پ-۱۰۳})$$

بر مبنای قضیه تابع معکوس‌شونده [۱۷۴]، که در پیوست "چ" بیان شده‌است، نتیجه می‌شود که معادله (پ-۱۰۲) می‌تواند به‌صورت $\mathbf{x}=\mathbf{g}\left(\mathbf{z},\mathbf{z}^{(1)},\ldots,\mathbf{z}^{(\mathrm{n}-1)}\right)$ در همسایگی $\mathbf{N}$ از متغیر حالت ابتدایی $\mathbf{x}_0$ برای $i=\mathrm{n}-1$ و به‌صورت یکتا حل شود؛ اگر رنک ماتریس ژاکوپین زیر کامل باشد:

$$\mathbf{O}_{\mathrm{n}}(\mathbf{x}_0)=\left.\frac{\partial\left(\mathbf{l}_{\mathrm{n}}(\mathbf{x})\right)}{\partial\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \qquad (\text{پ-۱۰۴})$$

در رابطه فوق، $\mathbf{l}_{\mathrm{n}}$ فرم کاهش‌یافته از $\mathbf{l}_{i+1}$ برای $i=\mathrm{n}-1$ است؛ که به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\mathbf{l}_{\mathrm{n}}(\mathbf{x})=\begin{bmatrix} L_{\mathbf{f}}^{0}(\mathbf{h}(\mathbf{x})) \\ L_{\mathbf{f}}^{1}(\mathbf{h}(\mathbf{x})) \\ L_{\mathbf{f}}^{2}(\mathbf{h}(\mathbf{x})) \\ \vdots \\ L_{\mathbf{f}}^{\mathrm{n}-1}(\mathbf{h}(\mathbf{x})) \end{bmatrix} \qquad (\text{پ-۱۰۵})$$

اینجا، $\mathbf{O}_{\mathrm{n}}$ ماتریس مشاهده‌پذیری نامیده می‌شود. به‌صورت ویژه، بر طبق قضیه تابع معکوس‌شونده، دو متغیر غیر قابل‌تشخیص ($\mathbf{x}_1$ و $\mathbf{x}_2$) در همسایگی $\mathbf{N}$ به گونه‌ای‌که $\mathbf{z}(\mathbf{x}_1)=\mathbf{z}(\mathbf{x}_2)$ نمی‌تواند وجود داشته باشد.

این اثبات معادل با خطی‌سازی معادله (پ-۱۳۹) با استفاده از بسط سری تیلور مرتبه اول حول $\mathbf{x}_0$ است؛ یعنی:

$$\mathbf{l}_{\mathrm{n}}(\mathbf{x})\approx\mathbf{l}_{\mathrm{n}}(\mathbf{x}_0)+\mathbf{O}_{\mathrm{n}}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) \qquad (\text{پ-۱۰۶})$$

با جایگزین‌کردن معادله فوق در معادله (پ-۱۰۲)، معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{z}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{z}^{(\mathrm{n}-1)} \end{bmatrix}-\mathbf{l}_{\mathrm{n}}(\mathbf{x}_0)+\mathbf{O}_{\mathrm{n}}(\mathbf{x}_0)\mathbf{x}_0=\mathbf{O}_{\mathrm{n}}(\mathbf{x}_0)\mathbf{x} \qquad (\text{پ-۱۰۷})$$

از آنجا که سمت چپ معادله فوق معلوم است؛ بر طبق قضیه Rouché–Capelli [۱۷۵]، رنک ستونی ماتریس $\mathbf{O}_{\mathrm{n}}(\mathbf{x}_0)$ باید کامل باشد تا متغیر حالت $\mathbf{x}$ در همسایگی $\mathbf{N}$ از $\mathbf{x}_0$ قابل بازیابی باشد. یعنی:

$$\mathrm{rank}\left(\mathbf{O}_{\mathrm{n}}(\mathbf{x}_0)\right)=\mathrm{n} \qquad (\text{پ-۱۰۸})$$

اثبات قضیه ۱۲ (مشاهده‌پذیری قوی): در این بخش اثبات قضیه ۱۲ مرتبط با شرایط لازم مشاهده‌پذیری قوی برای یک سیستم غیرخطی پیوسته زمان در حالت افاین بیان می‌شود.

اثبات: خروجی سیستم و مشتقات خروجی تا مرتبه i-ام به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{cases} \mathbf{z}=\mathbf{h}(\mathbf{x})=L_{\mathbf{f}}^{0}(\mathbf{h}) \\ \mathbf{z}^{(1)}=L_{\mathbf{f}}^{1}(\mathbf{h})+L_{\mathbf{g}_{\mathrm{d}}}^{1}(\mathbf{h}(\mathbf{x}))\mathbf{d} \\ \mathbf{z}^{(2)}=L_{\mathbf{f}}^{2}(\mathbf{h})+L_{\mathbf{g}_{\mathrm{d}}}^{1}L_{\mathbf{f}}^{1}(\mathbf{h}(\mathbf{x}))\mathbf{d}+L_{\mathbf{f}}^{1}L_{\mathbf{g}_{\mathrm{d}}}^{1}(\mathbf{hd})+L_{\mathbf{g}_{\mathrm{d}}}^{1}(\mathbf{h}(\mathbf{x}))\mathbf{d}^{(1)}+\mathrm{h.o.t} \\ \vdots \\ \mathbf{z}^{(\mathrm{n}-1)}=L_{\mathbf{f}}^{\mathrm{n}-1}(\mathbf{h})+\sum_{j=0}^{\mathrm{n}-3}L_{\mathbf{f}}^{j}L_{\mathbf{g}_{\mathrm{d}}}^{1}L_{\mathbf{f}}^{\mathrm{n}-(j+2)}(\mathbf{h}(\mathbf{x}))\mathbf{d}+L_{\mathbf{f}}^{\mathrm{n}-2}L_{\mathbf{g}_{\mathrm{d}}}^{1}(\mathbf{hd})+\ldots \\ \quad +\sum_{j=0}^{\mathrm{n}-(m+3)}\frac{(j+m)!}{j!\,m!}L_{\mathbf{f}}^{j}L_{\mathbf{g}_{\mathrm{d}}}^{1}L_{\mathbf{f}}^{\mathrm{n}-(m+2+j)}(\mathbf{h})\mathbf{d}^{(m)}+\frac{(\mathrm{n}-2)!}{(\mathrm{n}-(m+2))!\,m!}L_{\mathbf{f}}^{\mathrm{n}-(m+2)}L_{\mathbf{g}_{\mathrm{d}}}^{1}(\mathbf{hd}^{(m)})+\cdots \\ \quad +L_{\mathbf{g}_{\mathrm{d}}}^{1}(\mathbf{h}(\mathbf{x}))\mathbf{d}^{(\mathrm{n}-2)}+\mathrm{h.o.t} \\ \vdots \\ \mathbf{z}^{(i)}=L_{\mathbf{f}}^{i}(\mathbf{h})+\sum_{j=0}^{i-2}L_{\mathbf{f}}^{j}L_{\mathbf{g}_{\mathrm{d}}}^{1}L_{\mathbf{f}}^{i-(j+1)}(\mathbf{h}(\mathbf{x}))\mathbf{d}+L_{\mathbf{f}}^{i-1}L_{\mathbf{g}_{\mathrm{d}}}^{1}(\mathbf{hd})+ \\ \quad \sum_{j=0}^{i-3}(j+1)L_{\mathbf{f}}^{j}L_{\mathbf{g}_{\mathrm{d}}}^{1}L_{\mathbf{f}}^{i-(j+2)}(\mathbf{h}(\mathbf{x}))\mathbf{d}^{(1)}+(i-1)L_{\mathbf{f}}^{i-2}L_{\mathbf{g}_{\mathrm{d}}}^{1}(\mathbf{hd}^{(1)})+\cdots \\ \quad +\sum_{j=0}^{i-(m+2)}\frac{(j+m)!}{j!\,m!}L_{\mathbf{f}}^{j}L_{\mathbf{g}_{\mathrm{d}}}^{1}L_{\mathbf{f}}^{i-(m+1+j)}(\mathbf{h})\mathbf{d}^{(m)}+\frac{(i-1)!}{(i-(m+1))!\,m!}L_{\mathbf{f}}^{i-(m+1)}L_{\mathbf{g}_{\mathrm{d}}}^{1}(\mathbf{hd}^{(m)})+\cdots+L_{\mathbf{g}_{\mathrm{d}}}^{1}(\mathbf{h}(\mathbf{x}))\mathbf{d}^{(i-1)}+\mathrm{h.o.t} \end{cases} \tag{پ-۱۰۹}$$

در رابطه فوق، $\mathbf{d}^{(m)}$ بیانگر مشتق m-ام ورودی‌های نامعلوم $\mathbf{d}$ نسبت به زمان برای $m=0,\ldots,i-1$ است. معادلات فوق می‌تواند به‌صورت زیر بیان شود:

(پ-۱۱۰)

$$\begin{cases} \mathbf{z}=\mathbf{h}(\mathbf{x})=L_{\mathbf{f}}^{0}(\mathbf{h}) \\ \mathbf{z}^{(1)}=L_{\mathbf{f}}^{1}(\mathbf{h})+L_{\mathbf{g}_{\mathrm{d}}}^{1}(\mathbf{h}(\mathbf{x}))\mathbf{d} \\ \mathbf{z}^{(2)}=L_{\mathbf{f}}^{2}(\mathbf{h})+\left(L_{\mathbf{g}_{\mathrm{d}}}^{1}L_{\mathbf{f}}^{1}(\mathbf{h}(\mathbf{x}))+\frac{\partial L_{\mathbf{f}}^{1}L_{\mathbf{g}_{\mathrm{d}}}^{1}(\mathbf{hd})}{\partial\mathbf{d}}\right)\mathbf{d}+L_{\mathbf{g}_{\mathrm{d}}}^{1}(\mathbf{h}(\mathbf{x}))\mathbf{d}^{(1)}+\mathrm{h.o.t} \\ \vdots \\ \mathbf{z}^{(\mathrm{n}-1)}=L_{\mathbf{f}}^{\mathrm{n}-1}(\mathbf{h})+\left(\sum_{j=0}^{\mathrm{n}-3}L_{\mathbf{f}}^{j}L_{\mathbf{g}_{\mathrm{d}}}^{1}L_{\mathbf{f}}^{\mathrm{n}-(j+2)}(\mathbf{h}(\mathbf{x}))+\frac{\partial L_{\mathbf{f}}^{\mathrm{n}-2}L_{\mathbf{g}_{\mathrm{d}}}^{1}(\mathbf{hd})}{\partial\mathbf{d}}\right)\mathbf{d}+\ldots \\ \quad +\left(\sum_{j=0}^{\mathrm{n}-(m+3)}\frac{(j+m)!}{j!\,m!}L_{\mathbf{f}}^{j}L_{\mathbf{g}_{\mathrm{d}}}^{1}L_{\mathbf{f}}^{\mathrm{n}-(m+2+j)}(\mathbf{h})+\frac{(\mathrm{n}-2)!}{(\mathrm{n}-(m+2))!\,m!}\frac{\partial L_{\mathbf{f}}^{\mathrm{n}-(m+2)}L_{\mathbf{g}_{\mathrm{d}}}^{1}(\mathbf{hd}^{(m)})}{\partial\mathbf{d}^{(m)}}\right)\mathbf{d}^{(m)}+\cdots+L_{\mathbf{g}_{\mathrm{d}}}^{1}(\mathbf{h}(\mathbf{x}))\mathbf{d}^{(\mathrm{n}-2)}+\mathrm{h.o.t} \\ \vdots \\ \mathbf{z}^{(i)}=L_{\mathbf{f}}^{i}(\mathbf{h})+\left(\sum_{j=0}^{i-2}L_{\mathbf{f}}^{j}L_{\mathbf{g}_{\mathrm{d}}}^{1}L_{\mathbf{f}}^{i-(j+1)}(\mathbf{h}(\mathbf{x}))+\frac{\partial L_{\mathbf{f}}^{i-1}L_{\mathbf{g}_{\mathrm{d}}}^{1}(\mathbf{hd})}{\partial\mathbf{d}}\right)\mathbf{d}+\left(\sum_{j=0}^{i-3}(j+1)L_{\mathbf{f}}^{j}L_{\mathbf{g}_{\mathrm{d}}}^{1}L_{\mathbf{f}}^{i-(j+2)}(\mathbf{h}(\mathbf{x}))+(i-1)\frac{\partial L_{\mathbf{f}}^{i-2}L_{\mathbf{g}_{\mathrm{d}}}^{1}(\mathbf{hd}^{(1)})}{\partial\mathbf{d}^{(1)}}\right)\mathbf{d}^{(1)}+\cdots \\ \quad +\left(\sum_{j=0}^{i-(m+2)}\frac{(j+m)!}{j!\,m!}L_{\mathbf{f}}^{j}L_{\mathbf{g}_{\mathrm{d}}}^{1}L_{\mathbf{f}}^{i-(m+1+j)}(\mathbf{h})+\frac{(i-1)!}{(i-(m+1))!\,m!}\frac{\partial L_{\mathbf{f}}^{i-(m+1)}L_{\mathbf{g}_{\mathrm{d}}}^{1}(\mathbf{hd}^{(m)})}{\partial\mathbf{d}^{(m)}}\right)\mathbf{d}^{(m)}+\cdots+L_{\mathbf{g}_{\mathrm{d}}}^{1}(\mathbf{h}(\mathbf{x}))\mathbf{d}^{(i-1)}+\mathrm{h.o.t} \end{cases}$$

معادله فوق می‌تواند به فرم ماتریسی زیر بازنویسی شود:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{z}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{z}^{(\mathrm{n}-1)} \\ \vdots \\ \mathbf{z}^{(i)} \end{bmatrix} = \mathbf{l}_{i+1}(\mathbf{x}) + \mathbf{W}_{\mathbf{d}_{i+1}} \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{d}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{d}^{(\mathrm{n}-1)} \\ \vdots \\ \mathbf{d}^{(i)} \end{bmatrix} \qquad \text{(پ-۱۱۱)}$$

جاییکه؛

(پ-۱۱۲)

$$\mathbf{W}_{\mathbf{d}_{i+1}} = \left[\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\
L^1_{\mathbf{g}_\mathbf{d}}(\mathbf{h}) & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\
L^1_{\mathbf{g}_\mathbf{d}} L^1_{\mathbf{f}}(\mathbf{h}) + \dfrac{\partial L^1_{\mathbf{f}} L^1_{\mathbf{g}_\mathbf{d}}(\mathbf{hd})}{\partial \mathbf{d}} & L^1_{\mathbf{g}_\mathbf{d}}(\mathbf{h}) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\sum_{j=0}^{\mathrm{n}-3} L^j_{\mathbf{f}} L^1_{\mathbf{g}_\mathbf{d}} L^{\mathrm{n}-(j+2)}_{\mathbf{f}}(\mathbf{h}) + \dfrac{\partial L^{\mathrm{n}-2}_{\mathbf{f}} L^1_{\mathbf{g}_\mathbf{d}}(\mathbf{hd})}{\partial \mathbf{d}} & \cdots & \cdots & \sum_{j=0}^{\mathrm{n}-(m+3)} \dfrac{(j+m)!}{j!\,m!} L^j_{\mathbf{f}} L^1_{\mathbf{g}_\mathbf{d}} L^{\mathrm{n}-(m+2+j)}_{\mathbf{f}}(\mathbf{h}) + \dfrac{(\mathrm{n}-2)!}{(\mathrm{n}-(m+2))!\,m!} \dfrac{\partial L^{\mathrm{n}-(m+2)}_{\mathbf{f}} L^1_{\mathbf{g}_\mathbf{d}}(\mathbf{hd}^{(m)})}{\partial \mathbf{d}^{(m)}} & \ddots & \cdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\sum_{j=0}^{i-2} L^j_{\mathbf{f}} L^1_{\mathbf{g}_\mathbf{d}} L^{i-(j+1)}_{\mathbf{f}}(\mathbf{h}) + \dfrac{\partial L^{i-1}_{\mathbf{f}} L^1_{\mathbf{g}_\mathbf{d}}(\mathbf{hd})}{\partial \mathbf{d}} & \cdots & \cdots & \sum_{j=0}^{i-(m+2)} \dfrac{(j+m)!}{j!\,m!} L^j_{\mathbf{f}} L^1_{\mathbf{g}_\mathbf{d}} L^{i-(m+1+j)}_{\mathbf{f}}(\mathbf{h}) + \dfrac{(i-1)!}{(i-(m+1))!\,m!} \dfrac{\partial L^{i-(m+1)}_{\mathbf{f}} L^1_{\mathbf{g}_\mathbf{d}}(\mathbf{hd}^{(m)})}{\partial \mathbf{d}^{(m)}} & \cdots & L^1_{\mathbf{g}_\mathbf{d}}(\mathbf{h}) & \mathbf{0}
\end{array}\right]$$

با جایگزین‌کردن معادله (پ-۱۰۶) در معادله (پ-۱۱۱)، عبارت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{z}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{z}^{(\mathrm{n}-1)} \\ \vdots \\ \mathbf{z}^{(i)} \end{bmatrix} - \mathbf{l}_{i+1}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{O}_{i+1}(\mathbf{x}_0)\mathbf{x}_0 = \mathbf{O}_{i+1}(\mathbf{x}_0)\mathbf{x} + \mathbf{W}_{\mathbf{d}_{i+1}}(\mathbf{x}_0) \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{d}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{d}^{(\mathrm{n}-1)} \\ \vdots \\ \mathbf{d}^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{i+1}(\mathbf{x}_0) & \mathbf{W}_{\mathbf{d}_{i+1}}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{d} \\ \vdots \\ \mathbf{d}^{(\mathrm{n}-1)} \\ \vdots \\ \mathbf{d}^{(i)} \end{bmatrix} \qquad \text{(پ-۱۱۳)}$$

از آنجا که، مشاهدات معلوم هستند؛ سمت چپ معادله فوق معلوم است. بنابراین، بر اساس قضیه ۱۵، که در پیوست "چ" بیان شده‌است، به‌منظور تشخیص متغیر حالت، $\mathbf{x}$، از ورودی‌های نامعلوم، $\mathbf{d},\ldots,\mathbf{d}^{(i)}$، ستون‌های ماتریس $\mathbf{O}_{i+1}(\mathbf{x}_0)$ باید مستقل خطی از ستون‌های ماتریس $\mathbf{W}_{\mathbf{d}_{i+1}}(\mathbf{x}_0)$ باشد؛ یعنی:

$$\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix}\mathbf{O}_{i+1} & \mathbf{W}_{\mathbf{d}_{i+1}}\end{bmatrix}\right)\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} = \operatorname{rank}\left(\mathbf{O}_{i+1}(\mathbf{x}_0)\right) + \operatorname{rank}\left(\mathbf{W}_{\mathbf{d}_{i+1}}(\mathbf{x}_0)\right) \qquad \text{(پ-۱۱۴)}$$

همچنین، بر طبق قضیه تابع معکوس‌شونده، که در پیوست "چ" بیان شده‌است، رنک ماتریس $\mathbf{O}_{i+1}(\mathbf{x}_0)$ باید کامل باشد؛ تا متغیر حالت، $\mathbf{x}=\mathbf{g}\left(\mathbf{z},\mathbf{z}^{(1)},\dots,\mathbf{z}^{(\mathrm{n}-1)}\right)$، به‌صورت یکتا در همسایگی $\mathbf{N}$ از $\mathbf{x}_0$ برای $i=\mathrm{n}-1$ قابل بازیابی باشند. یعنی؛

$$\operatorname{rank}\left(\mathbf{O}_{\mathrm{n}}(\mathbf{x}_0)\right) = \mathrm{n} \qquad \text{(پ-۱۱۵)}$$

بنابراین

$$\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix}\mathbf{O}_{\mathrm{n}} & \mathbf{W}_{\mathbf{d}}\end{bmatrix}\right)\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} = \mathrm{n} + \operatorname{rank}\left(\mathbf{W}_{\mathbf{d}}(\mathbf{x}_0)\right) \qquad \text{(پ-۱۱۶)}$$

در رابطه فوق، $\mathbf{W}_{\mathbf{d}}$ فرم کاهش‌یافته از $\mathbf{W}_{\mathbf{d}_{i+1}}$ برای $i=\mathrm{n}-1$ است، که به‌صورت زیر بیان می‌شود:

(پ-۱۱۷)

$$\mathbf{W}_{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix}
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
L^1_{\mathbf{g}_\mathbf{d}}(\mathbf{h}) & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
L^1_{\mathbf{g}_\mathbf{d}} L^1_{\mathbf{f}}(\mathbf{h}) + \dfrac{\partial L^1_{\mathbf{f}} L^1_{\mathbf{g}_\mathbf{d}}(\mathbf{hd})}{\partial \mathbf{d}} & L^1_{\mathbf{g}_\mathbf{d}}(\mathbf{h}) & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\sum_{j=0}^{\mathrm{n}-3} L^j_{\mathbf{f}} L^1_{\mathbf{g}_\mathbf{d}} L^{\mathrm{n}-(j+2)}_{\mathbf{f}}(\mathbf{h}) + \dfrac{\partial L^{\mathrm{n}-2}_{\mathbf{f}} L^1_{\mathbf{g}_\mathbf{d}}(\mathbf{hd})}{\partial \mathbf{d}} & \cdots & \cdots & \sum_{j=0}^{\mathrm{n}-(m+3)} \dfrac{(j+m)!}{j!\,m!} L^j_{\mathbf{f}} L^1_{\mathbf{g}_\mathbf{d}} L^{\mathrm{n}-(m+2+j)}_{\mathbf{f}}(\mathbf{h}) + \dfrac{(\mathrm{n}-2)!}{(\mathrm{n}-(m+2))!\,m!} \dfrac{\partial L^{\mathrm{n}-(m+2)}_{\mathbf{f}} L^1_{\mathbf{g}_\mathbf{d}}(\mathbf{hd}^{(m)})}{\partial \mathbf{d}^{(m)}} & \cdots & L^1_{\mathbf{g}_\mathbf{d}}(\mathbf{h}) & \mathbf{0}
\end{bmatrix}$$

اینجا، $\mathbf{W}_{\mathbf{d}}$ ماتریس معکوس‌پذیر اغتشاش است. به‌صورت ویژه، بر طبق قضایای تابع معکوس‌شونده و قضیه ۱۵، دو متغیر حالت غیرقابل تشخیص ($\mathbf{x}_1$ و $\mathbf{x}_2$) در حضور از دو ورودی نامعلوم ($\mathbf{d}_1$ و $\mathbf{d}_2$) و در همسایگی $\mathbf{N}$ به گونه‌ای‌که $\mathbf{z}(\mathbf{x}_1,\mathbf{d}_1)=\mathbf{z}(\mathbf{x}_2,\mathbf{d}_2)$ نمی‌تواند وجود داشته باشد.

اثبات قضیه ۱۳ (مشاهده‌پذیری ورودی‌های نامعلوم): در این بخش اثبات قضیه ۱۳ به‌منظور بررسی مشاهده‌پذیری ورودی‌های نامعلوم برای یک سیستم غیرخطی پیوسته زمان در حالت افاین بیان می‌شود.

اثبات: خروجی سیستم و مشتقات خروجی تا مرتبه i-ام بر طبق معادله (پ-۱۱۳) و با پارتیشن‌بندی ماتریس معکوس‌پذیری به‌صورت $\mathbf{W}_{\mathbf{d}_{i+1}} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{\mathrm{d}_{i+1}} & \mathbf{W}'_{\mathbf{d}_{i+1}} \end{bmatrix}$ به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{z}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{z}^{(\mathrm{n})} \\ \vdots \\ \mathbf{z}^{(i)} \end{bmatrix} - \mathbf{l}_{i+1} = \mathbf{O}_{i+1}\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\right) + \mathbf{O}_{\mathrm{d}_{i+1}}\mathbf{d} + \mathbf{W}'_{\mathbf{d}_{i+1}} \begin{bmatrix} \mathbf{d}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{d}^{(\mathrm{n})} \\ \vdots \\ \mathbf{d}^{(i)} \end{bmatrix} \tag{پ-۱۱۸}$$

که؛

$$\mathbf{O}_{\mathrm{d}_{i+1}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ L^1_{\mathbf{g_d}}(\mathbf{h}) \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^{\mathrm{n}-2} L^j_{\mathbf{f}} L^1_{\mathbf{g_d}} L_{\mathbf{f}}^{\mathrm{n}-(j+1)}(\mathbf{h}) + \dfrac{\partial L_{\mathbf{f}}^{\mathrm{n}-1} L^1_{\mathbf{g_d}}(\mathbf{hd})}{\partial \mathbf{d}} \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^{i-2} L^j_{\mathbf{f}} L^1_{\mathbf{g_d}} L_{\mathbf{f}}^{i-(j+1)}(\mathbf{h}) + \dfrac{\partial L_{\mathbf{f}}^{i-1} L^1_{\mathbf{g_d}}(\mathbf{hd})}{\partial \mathbf{d}} \end{bmatrix} \tag{پ-۱۱۹}$$

(پ-۱۲۰)

$$\mathbf{W}'_{\mathbf{d}_{i+1}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ L^1_{\mathbf{g_d}}(\mathbf{h}) & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \sum_{j=0}^{\mathrm{n}-3}(j+1) L^j_{\mathbf{f}} L^1_{\mathbf{g_d}} L_{\mathbf{f}}^{\mathrm{n}-(j+2)}(\mathbf{h}) + (\mathrm{n}-1)\dfrac{\partial L_{\mathbf{f}}^{\mathrm{n}-2} L^1_{\mathbf{g_d}}(\mathbf{hd}^{(1)})}{\partial \mathbf{d}^{(1)}} & \cdots & \sum_{j=0}^{\mathrm{n}-(m+2)} \dfrac{(j+m)!}{j!\,m!} L^j_{\mathbf{f}} L^1_{\mathbf{g_d}} L_{\mathbf{f}}^{\mathrm{n}-(m+1+j)}(\mathbf{h}) + \dfrac{(\mathrm{n}-1)!}{(\mathrm{n}-(m+1))!\,m!} \dfrac{\partial L_{\mathbf{f}}^{\mathrm{n}-(m+1)} L^1_{\mathbf{g_d}}(\mathbf{hd}^{(m)})}{\partial \mathbf{d}^{(m)}} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{j=0}^{i-3}(j+1) L^j_{\mathbf{f}} L^1_{\mathbf{g_d}} L_{\mathbf{f}}^{i-(j+2)}(\mathbf{h}) + (i-1)\dfrac{\partial L_{\mathbf{f}}^{i-2} L^1_{\mathbf{g_d}}(\mathbf{hd}^{(1)})}{\partial \mathbf{d}^{(1)}} & \cdots & \sum_{j=0}^{i-(m+2)} \dfrac{(j+m)!}{j!\,m!} L^j_{\mathbf{f}} L^1_{\mathbf{g_d}} L_{\mathbf{f}}^{i-(m+1+j)}(\mathbf{h}) + \dfrac{(i-1)!}{(i-(m+1))!\,m!} \dfrac{\partial L_{\mathbf{f}}^{i-(m+1)} L^1_{\mathbf{g_d}}(\mathbf{hd}^{(m)})}{\partial \mathbf{d}^{(m)}} & \cdots & L^1_{\mathbf{g_d}}(\mathbf{h}) & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

در روابط فوق، $\mathbf{d}^{(m)}$ بیانگر مشتق m-ام $\mathbf{d}$ نسبت به زمان برای $m = 0,\ldots,i-1$ است. با بازنویسی معادله (پ-۱۱۸)، معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{z}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{z}^{(\mathrm{n})} \\ \vdots \\ \mathbf{z}^{(i)} \end{bmatrix} - \mathbf{l}_{i+1}(\mathbf{x}_0) - \mathbf{O}_{i+1}\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\right) = \mathbf{O}_{\mathrm{d}_{i+1}}\mathbf{d} + \mathbf{W}'_{\mathbf{d}_{i+1}} \begin{bmatrix} \mathbf{d}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{d}^{(\mathrm{n})} \\ \vdots \\ \mathbf{d}^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{\mathrm{d}_{i+1}} & \mathbf{W}'_{\mathbf{d}_{i+1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{d}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{d}^{(\mathrm{n})} \\ \vdots \\ \mathbf{d}^{(i)} \end{bmatrix} \tag{پ-۱۲۱}$$

از آنجا که سمت چپ معادله فوق معلوم است؛ بر طبق قضیه ۱۵، که در پیوست "چ" بیان شده‌است، به‌منظور بازیابی ورودی نامعلوم $\mathbf{d}$ از سایر ورودی‌های نامعلوم $\mathbf{d}^{(1)},...,\mathbf{d}^{(i)}$، ستون‌های ماتریس $\mathbf{O}_{\mathrm{d}_{i+1}}$ باید مستقل خطی از ستون‌های ماتریس $\mathbf{W}'_{\mathbf{d}_{i+1}}$ باشد. یعنی؛

$$\operatorname{rank}\left(\left[\mathbf{O}_{\mathrm{d}_{i+1}} \quad \mathbf{W}'_{\mathbf{d}_{i+1}}\right]\right)\Big|_{\mathbf{d}=\mathbf{d}_0} = \operatorname{rank}\left(\mathbf{O}_{\mathrm{d}_{i+1}}(\mathbf{d}_0)\right) + \operatorname{rank}\left(\mathbf{W}'_{\mathbf{d}_{i+1}}(\mathbf{d}_0)\right) \tag{پ-۱۲۲}$$

همچنین، بر مبنای قضیه تابع معکوس‌شونده، که در پیوست "چ" بیان شده‌است، ورودی نامعلوم $\mathbf{d}=\mathbf{g}\left(\mathbf{z},\mathbf{z}^{(1)},...,\mathbf{z}^{(\mathrm{n}-1)},\mathbf{x}_0\right)$ در همسایگی $\mathbf{N}$ از $\mathbf{d}_0$ با دانستن اطلاعات خروجی $(\mathbf{z})$ و $\mathbf{x}_0$، به‌ازای $i=\mathrm{n}$ به‌صورت یکتا تعیین می‌شود؛ اگر رنک ماتریس $\mathbf{O}_{\mathrm{d}}$ کامل باشد. یعنی؛

$$\operatorname{rank}\left(\mathbf{O}_{\mathrm{d}}(\mathbf{d}_0)\right) = \mathrm{n}_{\mathrm{d}} \tag{پ-۱۲۳}$$

در رابطه فوق، $\mathbf{O}_{\mathrm{d}}$ فرم کاهش‌یافته ماتریس $\mathbf{O}_{\mathrm{d}_{i+1}}$ به‌ازای $i=\mathrm{n}$ است؛ که به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\mathbf{O}_{\mathrm{d}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ L^1_{\mathbf{g}_\mathbf{d}}(\mathbf{h}) \\ L^1_{\mathbf{g}_\mathbf{d}} L^1_{\mathbf{f}}(\mathbf{h}) + \dfrac{\partial L^1_{\mathbf{f}} L^1_{\mathbf{g}_\mathbf{d}}(\mathbf{hd})}{\partial \mathbf{d}} \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=0}^{\mathrm{n}-2} L^j_{\mathbf{f}} L^1_{\mathbf{g}_\mathbf{d}} L_{\mathbf{f}}^{\mathrm{n}-(j+1)}(\mathbf{h}) + \dfrac{\partial L^{\mathrm{n}-1}_{\mathbf{f}} L^1_{\mathbf{g}_\mathbf{d}}(\mathbf{hd})}{\partial \mathbf{d}} \end{bmatrix} \tag{پ-۱۲۴}$$

اینجا، $\mathbf{O}_{\mathrm{d}}$ ماتریس مشاهده‌پذیری ورودی‌های نامعلوم نامیده می‌شود. بنابراین،

$$\operatorname{rank}\left(\left[\mathbf{O}_{\mathrm{d}} \quad \mathbf{W}'_{\mathbf{d}}\right]\right)\Big|_{\mathbf{d}=\mathbf{d}_0} = \mathrm{n}_{\mathrm{d}} + \operatorname{rank}\left(\mathbf{W}'_{\mathbf{d}}(\mathbf{d}_0)\right) \tag{پ-۱۲۵}$$

در رابطه فوق، $\mathbf{W}'_{\mathbf{d}}$ فرم کاهش‌یافته ماتریس $\mathbf{W}'_{\mathbf{d}_{i+1}}$ به ازای $i=\mathrm{n}$ است؛ که به‌صورت زیر بیان می‌شود:

(پ-۱۲۶)

$$\mathbf{W}'_{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ L^1_{\mathbf{g}_\mathbf{d}}(\mathbf{h}) & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \sum\limits_{j=0}^{\mathrm{n}-3}(j+1) L^j_{\mathbf{f}} L^1_{\mathbf{g}_\mathbf{d}} L_{\mathbf{f}}^{\mathrm{n}-(j+2)}(\mathbf{h}) + (\mathrm{n}-1)\dfrac{\partial L^{\mathrm{n}-2}_{\mathbf{f}} L^1_{\mathbf{g}_\mathbf{d}}(\mathbf{hd}^{(1)})}{\partial \mathbf{d}^{(1)}} & \cdots & \sum\limits_{j=0}^{\mathrm{n}-(m+2)} \dfrac{(j+m)!}{j!\,m!} L^j_{\mathbf{f}} L^1_{\mathbf{g}_\mathbf{d}} L_{\mathbf{f}}^{\mathrm{n}-(m+1+j)}(\mathbf{h}) + \dfrac{(\mathrm{n}-1)!}{\left(\mathrm{n}-(m+1)\right)!\,m!} \dfrac{\partial L_{\mathbf{f}}^{\mathrm{n}-(m+1)} L^1_{\mathbf{g}_\mathbf{d}}(\mathbf{hd}^{(m)})}{\partial \mathbf{d}^{(m)}} & \cdots & L^1_{\mathbf{g}_\mathbf{d}}(\mathbf{h}) & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

به‌صورت ویژه، بر طبق قضایای تابع معکوس‌شونده و ۱۵، دو بردار مجهول غیرقابل تشخیص ($\mathbf{d}_1$ و $\mathbf{d}_2$) در حضور از دو متغیر حالت ($\mathbf{x}_1$ و $\mathbf{x}_2$) و در همسایگی N به‌گونه‌ای که $\mathbf{z}(\mathbf{x}_1,\mathbf{d}_1)=\mathbf{z}(\mathbf{x}_2,\mathbf{d}_2)$ نمی‌تواند

وجود داشته باشد.

اثبات قضیه ۱۴ (مشاهده‌پذیری توأمان متغیرهای حالت و ورودی‌های نامعلوم): در این بخش اثبات قضیه ۱۴ مرتبط با شرایط لازم مشاهده‌پذیری توأمان متغیرهای حالت و ورودی‌های نامعلوم برای یک سیستم غیرخطی پیوسته زمان در حالت افاین بیان می‌شود.

اثبات: خروجی سیستم و مشتقات خروجی تا مرتبه i-ام برطبق معادله (پ-۱۲۱) در فرم ماتریسی به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{z}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{z}^{(n)} \\ \vdots \\ \mathbf{z}^{(i)} \end{bmatrix} - \mathbf{l}_{i+1}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{O}_{\mathrm{nd}_{i+1}}(\mathbf{x}_{a_0})\,\mathbf{x}_{a_0} = \mathbf{O}_{\mathrm{nd}_{i+1}}(\mathbf{x}_{a_0})\mathbf{x}_a + \mathbf{W}'_{\mathbf{d}_{i+1}}(\mathbf{x}_{a_0}) \begin{bmatrix} \mathbf{d}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{d}^{(n)} \\ \vdots \\ \mathbf{d}^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{\mathrm{nd}_{i+1}} & \mathbf{W}'_{\mathbf{d}_{i+1}} \end{bmatrix}\Big|_{\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_{a_0}} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{d}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{d}^{(n)} \\ \vdots \\ \mathbf{d}^{(i)} \end{bmatrix} \quad \text{(پ-۱۲۷)}$$

در رابطه فوق، $\mathbf{O}_{\mathrm{nd}_{i+1}} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{i+1} & \mathbf{O}_{\mathrm{d}_{i+1}} \end{bmatrix}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{O}_{\mathrm{nd}_{i+1}} = \begin{bmatrix} \left.\dfrac{\partial L_{\mathbf{f}}^0(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} & \mathbf{0} \\ \left.\dfrac{\partial L_{\mathbf{f}}^1(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} & L_{\mathbf{g}_\mathbf{d}}^1(\mathbf{h}) \\ \left.\dfrac{\partial L_{\mathbf{f}}^2(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} & L_{\mathbf{g}_\mathbf{d}}^1 L_{\mathbf{f}}^1(\mathbf{h}) + \dfrac{\partial L_{\mathbf{f}}^1 L_{\mathbf{g}_\mathbf{d}}^1(\mathbf{hd})}{\partial \mathbf{d}} \\ \vdots & \vdots \\ \left.\dfrac{\partial L_{\mathbf{f}}^n(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} & \displaystyle\sum_{j=0}^{n-2} L_{\mathbf{f}}^j L_{\mathbf{g}_\mathbf{d}}^1 L_{\mathbf{f}}^{n-(j+1)}(\mathbf{h}) + \dfrac{\partial L_{\mathbf{f}}^{n-1} L_{\mathbf{g}_\mathbf{d}}^1(\mathbf{hd})}{\partial \mathbf{d}} \\ \vdots & \vdots \\ \left.\dfrac{\partial L_{\mathbf{f}}^i(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} & \displaystyle\sum_{j=0}^{i-2} L_{\mathbf{f}}^j L_{\mathbf{g}_\mathbf{d}}^1 L_{\mathbf{f}}^{i-(j+1)}(\mathbf{h}) + \dfrac{\partial L_{\mathbf{f}}^{i-1} L_{\mathbf{g}_\mathbf{d}}^1(\mathbf{hd})}{\partial \mathbf{d}} \end{bmatrix} \quad \text{(پ-۱۲۸)}$$

از انجا که ورودی‌های سیستم و مشاهدات معلوم است؛ آنگاه سمت چپ معادله فوق معلوم فرض می‌شود. بنابراین، بر طبق قضیه ۱۵، که در پیوست "چ" بیان شده‌است، به‌منظور بازیابی متغیر حالت افزوده، $\mathbf{x}_a$ از ورودی‌های نامعلوم $\mathbf{d}^{(1)},\ldots,\mathbf{d}^{(i)}$، ستون‌های ماتریس $\mathbf{O}_{\mathrm{nd}_{i+1}}$ باید مستقل خطی از ستون‌های ماتریس $\mathbf{W}'_{\mathbf{d}_{i+1}}$ باشد. یعنی؛

$$\mathrm{rank}\left(\begin{bmatrix}\mathbf{O}_{\mathrm{nd}} & \mathbf{W}'_{\mathbf{d}_{0:\tau}}\end{bmatrix}\right)=\mathrm{rank}\left(\mathbf{O}_{\mathrm{nd}}\right)+\mathrm{rank}(\mathbf{W}'_{\mathbf{d}}) \quad \text{(پ-۱۲۹)}$$

همچنین، بر مبنای قضیه تابع معکوس‌شونده، که در پیوست "چ" بیان شده‌است، متغیر حالت افزونه $\mathbf{x}_{\mathrm{a}}=\mathbf{g}\left(\mathbf{z},\mathbf{z}_0^{(1)},...,\mathbf{z}_0^{(\mathrm{n}-1)}\right)$ در همسایگی $\mathbf{N}$ از $\mathbf{x}_{\mathrm{a}_0}$ با دانستن اطلاعات خروجی و مشتقات آن و ورودی‌های نامعلوم، $\mathbf{d}^{(1)},...,\mathbf{d}^{(i)}$، به‌ازای $i=\mathrm{n}$ به‌صورت یکتا از معادله (پ-۱۲۷) تعیین می‌شود؛ اگر رنک ماتریس $\mathbf{O}_{\mathrm{nd}}$ کامل باشد. یعنی؛

$$\mathrm{rank}\left(\mathbf{O}_{\mathrm{nd}}(\mathbf{x}_{\mathrm{a}_0})\right)=\mathrm{n}+\mathrm{n}_{\mathrm{d}} \quad \text{(پ-۱۳۰)}$$

در رابطه فوق، $\mathbf{O}_{\mathrm{nd}}=\begin{bmatrix}\mathbf{O}_{\mathrm{n}} & \mathbf{O}_{\mathrm{d}}\end{bmatrix}$ فرم کاهش‌یافته ماتریس $\mathbf{O}_{\mathrm{nd}_{i+1}}$ به ازای $i=\mathrm{n}$ است؛ که به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\mathbf{O}_{\mathrm{nd}}=\begin{bmatrix}
\left.\frac{\partial L_{\mathbf{f}}^0(\mathbf{h})}{\partial\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} & \mathbf{0}\\
\left.\frac{\partial L_{\mathbf{f}}^1(\mathbf{h})}{\partial\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} & L_{\mathbf{g}_{\mathbf{d}}}^1(\mathbf{h})\\
\left.\frac{\partial L_{\mathbf{f}}^2(\mathbf{h})}{\partial\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} & L_{\mathbf{g}_{\mathbf{d}}}^1L_{\mathbf{f}}^1(\mathbf{h})+\frac{\partial L_{\mathbf{f}}^1L_{\mathbf{g}_{\mathbf{d}}}^1(\mathbf{hd})}{\partial\mathbf{d}}\\
\vdots & \vdots\\
\left.\frac{\partial L_{\mathbf{f}}^{\mathrm{n}}(\mathbf{h})}{\partial\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} & \sum_{j=0}^{\mathrm{n}-2}L_{\mathbf{f}}^jL_{\mathbf{g}_{\mathbf{d}}}^1L_{\mathbf{f}}^{\mathrm{n}-(j+1)}(\mathbf{h})+\frac{\partial L_{\mathbf{f}}^{\mathrm{n}-1}L_{\mathbf{g}_{\mathbf{d}}}^1(\mathbf{hd})}{\partial\mathbf{d}}
\end{bmatrix} \quad \text{(پ-۱۳۱)}$$

اینجا، $\mathbf{O}_{\mathrm{nd}}$ ماتریس مشاهده‌پذیری متغیر حالت افزونه نامیده می‌شود. بنابراین،

$$\left.\mathrm{rank}\left(\begin{bmatrix}\mathbf{O}_{\mathrm{nd}} & \mathbf{W}'_{\mathbf{d}}\end{bmatrix}\right)\right|_{\mathbf{x}_{\mathrm{a}}=\mathbf{x}_{\mathrm{a}_0}}=\mathrm{n}+\mathrm{n}_{\mathrm{d}}+\mathrm{rank}\left(\mathbf{W}'_{\mathbf{d}}(\mathbf{x}_{\mathrm{a}_0})\right) \quad \text{(پ-۱۳۲)}$$

به‌صورت ویژه، بر طبق قضایای تابع معکوس‌شونده و ۱۵، دو بردار متغیر حالت افزونه غیرقابل تشخیص ($\mathbf{x}_{\mathrm{a}_1}$ و $\mathbf{x}_{\mathrm{a}_2}$) در همسایگی $\mathbf{N}$ به‌گونه‌ای که $\mathbf{z}(\mathbf{x}_{\mathrm{a}_1})=\mathbf{z}(\mathbf{x}_{\mathrm{a}_2})$ نمی‌تواند وجود داشته باشد.

پیوست چ: قضایای کمکی به منظور اثبات قضایای مشاهده‌پذیری

قضیه ۱۵: سیستم خطی زیر را درنظر بگیرید:

$$\mathbf{z}=\mathbf{T}\mathbf{x} \tag{پ-۱۳۳}$$

در رابطه فوق، $\mathbf{z}\in\mathbb{R}^m$ و $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ هستند. فرض می‌شود که رنک ماتریس $\mathbf{T}$ کامل نباشد؛ یعنی $\mathrm{rank}(\mathbf{T})<n$. همچنین، فرض می‌شود که ماتریس $\mathbf{T}$ می‌تواند به‌صورت زیر پارتیشن‌بندی شود:

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\end{bmatrix} \tag{پ-۱۳۴}$$

در رابطه فوق، رنک ماتریس $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{m,p}$ کامل است؛ یعنی رنک ماتریس برابر p است. همچنین، رنک ماتریس $\mathbf{B}\in\mathbb{R}^{m,q}$ برابر $k<q$ است. همچنین، معادله (پ-۱۳۳) می‌تواند به‌صورت زیر نوشته شود:

$$\mathbf{z}=\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_1\\ \mathbf{x}_2\end{bmatrix}=\mathbf{A}\mathbf{x}_1+\mathbf{B}\mathbf{x}_2 \tag{پ-۱۳۵}$$

در رابطه فوق، $\mathbf{x}_1\in\mathbb{R}^p$ و $\mathbf{x}_2\in\mathbb{R}^q$ هستند. اگر ستون‌های ماتریس $\mathbf{A}$ مستقل خطی از ستون‌های ماتریس $\mathbf{B}$ باشند؛ یعنی:

$$\mathrm{rank}\left(\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\end{bmatrix}\right)=\mathrm{rank}(\mathbf{A})+\mathrm{rank}(\mathbf{B}) \tag{پ-۱۳۶}$$

آنگاه، $\mathbf{x}_1$ به‌صورت یکتا به ازای هر $\mathbf{z}$ تعیین می‌شود.

اثبات قضیه ۱۵: ماتریس‌های $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\mathbf{A}=[\mathbf{a}_1 \quad \dots \quad \mathbf{a}_k \quad \mathbf{a}_{k+1} \quad \dots \quad \mathbf{a}_{k+p} \quad \dots \quad \mathbf{a}_m]^T \tag{پ-۱۳۷}$$

$$\mathbf{B}=[\mathbf{b}_1 \quad \dots \quad \mathbf{b}_k \quad \mathbf{b}_{k+1} \quad \dots \quad \mathbf{b}_{k+p} \quad \dots \quad \mathbf{b}_m]^T \tag{پ-۱۳۸}$$

بنابراین، معادله (پ-۱۳۵) می‌تواند با استفاده از ترکیب خطی بردارهای پایه به‌صورت زیر بیان شود:

$$\begin{bmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_k\\ z_{k+1}\\ \vdots\\ z_{k+p}\\ z_{k+p+1}\\ \vdots\\ z_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{b}_1\\ \vdots & \vdots\\ \mathbf{a}_k & \mathbf{b}_k\\ \mathbf{a}_{k+1} & \mathbf{b}_{k+1}\\ \vdots & \vdots\\ \mathbf{a}_{k+p} & \mathbf{b}_{k+p}\\ \mathbf{a}_{k+p+1} & \mathbf{b}_{k+p+1}\\ \vdots & \vdots\\ \mathbf{a}_m & \mathbf{b}_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_1\\ \mathbf{x}_2\end{bmatrix} \tag{پ-۱۳۹}$$

برطبق معادله (پ-۱۳۵)، رنک ماتریس $[\mathbf{A} \quad \mathbf{B}]$ برابر k+p است. بنابراین، k+p ردیف مستقل خطی وجود دارد. همچنین، از آنجا که رنک ماتریس $\mathbf{B}$ برابر k است؛ فرض می‌شود که $\mathbf{b}_1,...,\mathbf{b}_k$ به گونه ای هستند که بردارهای $\mathbf{b}_{k+1},...,\mathbf{b}_{k+p}$ می‌تواند به‌صورت ترکیب خطی از $\mathbf{b}_1,...,\mathbf{b}_k$ بیان شوند. بنابراین، ترکیب خطی از اولین k ردیف می‌تواند از دیگر ردیف‌ها به‌گونه‌ای استخراج شود تا معادله زیر حاصل شود:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_k \\ \tilde{z}_{k+1} \\ \vdots \\ \tilde{z}_{k+p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{b}_1 \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{a}_k & \mathbf{b}_k \\ \tilde{\mathbf{a}}_{k+1} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{a}}_{k+p} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x_1} \\ \mathbf{x_2} \end{bmatrix} \qquad \text{(پ-۱۴۰)}$$

قسمت انتهایی از معادله فوق، می‌تواند به‌صورت زیر بیان شود:

$$\begin{bmatrix} \tilde{z}_{k+1} \\ \vdots \\ \tilde{z}_{k+p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{a}}_{k+1} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{a}}_{k+p} \end{bmatrix} \mathbf{x_1} \qquad \text{(پ-۱۴۱)}$$

از آنجاکه، رنک $\mathbf{a}_{1:k+p}$ برابر k+p است؛ آنگاه رنک ماتریس‌های $\mathbf{a}_{k+1:k+p}$ و $\tilde{\mathbf{a}}_{k+1:k+p}$ برابر p است. لذا، بر طبق قضیه Rouché–Capelli [۱۷۵]، بردار $\mathbf{x_1} \in \mathbb{R}^p$ به‌صورت یکتا تعیین می‌شود.

قضیه تابع معکوس‌شونده: سیستم n معادله زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{cases} \mathbf{y}_1 = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n) \\ \mathbf{y}_2 = \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n) \\ \qquad \vdots \\ \mathbf{y}_n = \mathbf{f}_n(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n) \end{cases} \qquad \text{(پ-۱۴۲)}$$

یک حل یکتا به‌صورت $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$ در همسایگی $\mathbf{x}_0$ وجود دارد؛ اگر دترمینان ماتریس ژاکوپین زیر غیرصفر باشد:

$$\mathbf{Jf}(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}_1} & \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}_2} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}_n} \\ \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{x}_1} & \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{x}_1} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{x}_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{f}_n}{\partial \mathbf{x}_1} & \frac{\partial \mathbf{f}_n}{\partial \mathbf{x}_2} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{f}_n}{\partial \mathbf{x}_n} \end{bmatrix} \qquad \text{(پ-۱۴۳)}$$

پیوست ح: اعتبارسنجی قضایای مشاهده‌پذیری غیرخطی

در این بخش، قضایای مشاهده‌پذیری مرتبط با یک سیستم غیرخطی افاین، که در فصل ۴ بیان شده‌است، اعتبارسنجی می‌شود. ابتدا، نتایج قضایای مشاهده‌پذیری سیستم غیرخطی افاین با نتایج قضایای مشاهده‌پذیری برای یک سیستم خطی مقایسه می‌شود. سپس، شرایط مشاهده‌پذیری برای یک مساله غیرخطی بر مبنای قضایای مشاهده‌پذیری بیان‌شده برای سیستم غیرخطی افاین استخراج می‌شود.

تحلیل نتایج قضایای مشاهده‌پذیری سیستم غیرخطی افاین برای یک سیستم خطی: در این بخش، یک سیستم خطی پیوسته زمان به‌منظور اعتبارسنجی قضایای مشاهده‌پذیری پیشنهادی استفاده می‌شود. سپس، نتایج تحلیل مشاهده‌پذیری غیرخطی با نتایج تئوری خطی مقایسه می‌شود. مدل فضای حالت یک سیستم خطی پیوسته زمان به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{B}_{\mathrm{d}}\,\mathbf{d} \qquad \text{(پ-۱۴۴)}$$

در رابطه فوق، $\mathbf{x}$ و $\mathbf{d}$ به‌ترتیب بیانگر متغیرهای حالت و ورودی‌های نامعلوم هستند. همچنین، $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}_{\mathrm{d}}$ به‌ترتیب نشان‌دهنده ماتریس‌های سیستم و ورودی نامعلوم هستند. به‌علاوه، معادله اندازه‌گیری به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}\,\mathbf{x} \qquad \text{(پ-۱۴۵)}$$

در رابطه فوق، $\mathbf{C}$ ماتریس خروجی است. ارتباط بین سیستم‌های خطی و غیرخطی از مقایسه معادلات (پ-۱۴۴) و (پ-۱۴۵) با معادلات (۵۰.۴) و (۵۱.۴) به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\,\mathbf{x};\ \mathbf{g}_{\mathbf{d}}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_{\mathrm{d}};\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}\,\mathbf{x} \qquad \text{(پ-۱۴۶)}$$

شرط مشاهده‌پذیری متغیر حالت: به‌منظور بررسی قضیه غیرخطی مشاهده‌پذیری متغیرحالت برای یک سیستم خطی بر طبق معادله (۵۴.۴)، مشتقات لی خروجی به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\mathbf{l}_{\mathrm{n}}(\mathbf{x}_0)=\begin{bmatrix} L_{\mathbf{f}}^{0}(\mathbf{h}) \\ L_{\mathbf{f}}^{1}(\mathbf{h}) \\ L_{\mathbf{f}}^{2}(\mathbf{h}) \\ \dots \\ L_{\mathbf{f}}^{\mathrm{n}-1}(\mathbf{h}) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{h} \\ \dfrac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}}.\mathbf{f} \\ \dfrac{\partial^2 \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}^2}.\mathbf{f} \\ \dots \\ \dfrac{\partial^{\mathrm{n}-1} \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}^{\mathrm{n}-1}}.\mathbf{f} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{C}\,\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{C}\,\mathbf{A}\,\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{C}\,\mathbf{A}^2\,\mathbf{x}_0 \\ \dots \\ \mathbf{C}\,\mathbf{A}^{\mathrm{n}-1}\,\mathbf{x}_0 \end{bmatrix} \tag{پ-۱۴۷}$$

همچنین، ماتریس مشاهده‌پذیری ($\mathbf{O}_{\mathrm{n}}$) برطبق معادله (۵۳.۴) به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{O}_{\mathrm{n}}(\mathbf{x}_0)=\left.\frac{\partial \mathbf{l}_{\mathrm{n}}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}=\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\,\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\,\mathbf{A}^2 \\ \dots \\ \mathbf{C}\,\mathbf{A}^{\mathrm{n}-1} \end{bmatrix} \tag{پ-۱۴۸}$$

بنابراین، بر مبنای تئوری مشاهده‌پذیری متغیر حالت، که در قضیه ۹ در بخش ۱.۳.۴ بیان شده‌است، متغیرهای حالت سیستم مشاهده‌پذیر است در صورتیکه $\mathrm{rank}\left(\mathbf{O}_{\mathrm{n}}\right)=\mathrm{n}$ باشد. این نتیجه مطابق با تئوری مشاهده‌پذیری متغیر حالت برای یک سیستم خطی است.

شرایط مشاهده‌پذیری قوی: به‌منظور بررسی قضیه غیرخطی مشاهده‌پذیری قوی برای یک سیستم خطی، ماتریس معکوس‌پذیری اغتشاش ($\mathbf{W}_{\mathbf{d}}$) باید ارزیابی شود. از آنجا که، $L_{\mathbf{f}}^{1}L_{\mathbf{g}_{\mathbf{d}}}^{1}(\mathbf{h})=\dfrac{\partial L_{\mathbf{g}_{\mathbf{d}}}^{1}(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{x}}\cdot\mathbf{f}=\dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}}\cdot\mathbf{g}_{\mathbf{d}}\right)}{\partial \mathbf{x}}\cdot\mathbf{f}=\dfrac{\partial\left(\mathbf{C}\mathbf{B}_{\mathbf{d}}\right)}{\partial \mathbf{x}}\cdot\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{0}$، لذا نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$L_{\mathbf{f}}^{2}L_{\mathbf{g}_{\mathbf{d}}}^{1}(\mathbf{h})=L_{\mathbf{f}}^{3}L_{\mathbf{g}_{\mathbf{d}}}^{1}(\mathbf{h})=\cdots=L_{\mathbf{f}}^{\mathrm{n}}L_{\mathbf{g}_{\mathbf{d}}}^{1}(\mathbf{h})=\mathbf{0} \tag{پ-۱۴۹}$$

بنابراین، بر طبق معادله (۵۸.۴)، ماتریس معکوس‌پذیری اغتشاش ($\mathbf{W}_{\mathbf{d}}$) به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\mathbf{W}_{\mathbf{d}}=\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ L_{\mathbf{g}_{\mathbf{d}}}^{1}(\mathbf{h}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ L_{\mathbf{g}_{\mathbf{d}}}^{1}L_{\mathbf{f}}^{1}(\mathbf{h}) & L_{\mathbf{g}_{\mathbf{d}}}^{1}(\mathbf{h}) & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ L_{\mathbf{g}_{\mathbf{d}}}^{1}L_{\mathbf{f}}^{2}(\mathbf{h}) & L_{\mathbf{g}_{\mathbf{d}}}^{1}L_{\mathbf{f}}^{1}(\mathbf{h}) & L_{\mathbf{g}_{\mathbf{d}}}^{1}(\mathbf{h}) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{\mathbf{g}_{\mathbf{d}}}^{1}L_{\mathbf{f}}^{\mathrm{n}-2}(\mathbf{h}) & L_{\mathbf{g}_{\mathbf{d}}}^{1}L_{\mathbf{f}}^{\mathrm{n}-3}(\mathbf{h}) & \cdots & L_{\mathbf{g}_{\mathbf{d}}}^{1}L_{\mathbf{f}}^{\mathrm{n}-(\mathrm{m}+2)}(\mathbf{h}) & \cdots & L_{\mathbf{g}_{\mathbf{d}}}^{1}(\mathbf{h}) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{پ-۱۵۰}$$

مولفه‌های اولین ستون به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{cases} L^1_{\mathbf{g_d}}(\mathbf{h}) = \dfrac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{g_d} = \mathbf{C}\,\mathbf{B_d} \\ L^1_{\mathbf{g_d}} L^1_{\mathbf{f}}(\mathbf{h}) = \dfrac{\partial L^1_{\mathbf{f}}(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{g_d} = \dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}\right)}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{g_d} = \dfrac{\partial\left(\mathbf{C}\,\mathbf{A}\,\mathbf{x}\right)}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{B_d} = \mathbf{C}\,\mathbf{A}\,\mathbf{B_d} \\ L^1_{\mathbf{g_d}} L^2_{\mathbf{f}}(\mathbf{h}) = \dfrac{\partial L^2_{\mathbf{f}}(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{g_d} = \dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial L^1_{\mathbf{f}}(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}\right)}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{g_d} = \dfrac{\partial\left(\mathbf{C}\,\mathbf{A}^2\mathbf{x}\right)}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{B_d} = \mathbf{C}\,\mathbf{A}^2\,\mathbf{B_d} \\ \vdots \\ L^1_{\mathbf{g_d}} L^{n-2}_{\mathbf{f}}(\mathbf{h}) = \mathbf{C}\,\mathbf{A}^{n-2}\,\mathbf{B_d} \end{cases} \qquad (\text{پ-۱۵۱})$$

در نتیجه، $\mathbf{W_d}$ به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\mathbf{W_d} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CB_d} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CAB_d} & \mathbf{CB_d} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-2}\mathbf{B_d} & \mathbf{CA}^{n-3}\mathbf{B_d} & \mathbf{CA}^{n-4}\mathbf{B_d} & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \qquad (\text{پ-۱۵۲})$$

بنابراین، بر مبنای تئوری مشاهده‌پذیری قوی، که در قضیه ۲ در بخش ۲.۳.۴ بیان شده‌است، متغیرهای حالت سیستم در حضور ورودی‌های نامعلوم مشاهده‌پذیر است؛ در صورتیکه

$$\operatorname{rank}\left(\mathbf{O}_n\right) = n \qquad (\text{پ-۱۵۳})$$

و

$$\operatorname{rank}\left(\left[\mathbf{O}_n \quad \mathbf{W_d}\right]\right) = n + \operatorname{rank}\left(\mathbf{W_d}\right) \qquad (\text{پ-۱۵۴})$$

برقرار باشد. این نتایج مطابق با تئوری مشاهده‌پذیری قوی برای یک سیستم خطی هستند.

شرایط مشاهده‌پذیری ورودی‌های نامعلوم: به‌منظور بررسی قضیه غیرخطی مشاهده‌پذیری ورودی‌های نامعلوم برای یک سیستم خطی، ماتریس مشاهده‌پذیری ورودی‌های نامعلوم ($\mathbf{O_d}$) و ماتریس معکوس‌پذیری اغتشاش ($\mathbf{W'_d}$) باید ارزیابی شود. برطبق معادلات (۶۲.۴) و (۶۳.۴)، $\mathbf{O_d}$ و $\mathbf{W'_d}$ به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\mathbf{O_d} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ L^1_{\mathbf{g_d}}(\mathbf{h}) \\ L^1_{\mathbf{g_d}} L^1_{\mathbf{f}}(\mathbf{h}) \\ \vdots \\ L^1_{\mathbf{g_d}} L^{n-1}_{\mathbf{f}}(\mathbf{h}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{C}\,\mathbf{B_d} \\ \mathbf{C}\,\mathbf{A}\,\mathbf{B_d} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\,\mathbf{A}^{n-1}\,\mathbf{B_d} \end{bmatrix} \qquad (\text{پ-۱۵۵})$$

$$\mathbf{W}'_{\mathbf{d}}=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ L^{1}_{\mathbf{g_d}}(\mathbf{h}) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ L^{1}_{\mathbf{g_d}}L^{n-2}_{\mathbf{f}}(\mathbf{h}) & L^{1}_{\mathbf{g_d}}L^{n-3}_{\mathbf{f}}(\mathbf{h}) & \cdots & \mathbf{0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \mathbf{CB_d} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{CA}^{n-2}\mathbf{B_d} & \mathbf{CA}^{n-3}\mathbf{B_d} & \cdots & \mathbf{0}\end{bmatrix} \quad \text{(پ-۱۵۶)}$$

بنابراین، برطبق قضیه مشاهده‌پذیری ورودی نامعلوم، که در قضیه ۳ در بخش ۳.۳.۴ بیان شده‌است، ورودی‌های نامعلوم برای سیستم غیرخطی مشاهده‌پذیر است؛ اگر

$$\operatorname{rank}\left(\mathbf{O_d}\right)=\mathrm{n}_{\mathbf{d}} \quad \text{(پ-۱۵۷)}$$

و

$$\operatorname{rank}\left(\mathbf{W_d}\right)=\mathrm{n_d}+\operatorname{rank}\left(\mathbf{W}'_{\mathbf{d}}\right) \quad \text{(پ-۱۵۸)}$$

برقرار باشد. این نتایج مطابق با تئوری مشاهده‌پذیری ورودی‌های نامعلوم برای یک سیستم خطی هستند.

شرایط مشاهده‌پذیری توأمان متغیرهای حالت و ورودی نامعلوم: به‌منظور بررسی قضیه مشاهده‌پذیری توأمان متغیرهای حالت و ورودی‌های نامعلوم، ماتریس متغیرهای حالت و ورودی‌های نامعلوم ($\mathbf{O}_{\mathrm{nd}}$) باید ارزیابی شود. برطبق معادله (۶۷.۴)، ماتریس مشاهده‌پذیری متغیرهای افزوده ($\mathbf{O}_{\mathrm{nd}}$) به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{O}_{\mathrm{nd}}=\begin{bmatrix}\left.\dfrac{\partial L^{0}_{\mathbf{f}}(\mathbf{h})}{\partial\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} & \mathbf{0}\\ \left.\dfrac{\partial L^{1}_{\mathbf{f}}(\mathbf{h})}{\partial\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} & L^{1}_{\mathbf{g_d}}(\mathbf{h})\\ \left.\dfrac{\partial L^{2}_{\mathbf{f}}(\mathbf{h})}{\partial\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} & L^{1}_{\mathbf{g_d}}L^{1}_{\mathbf{f}}(\mathbf{h})\\ \vdots & \vdots\\ \left.\dfrac{\partial L^{n}_{\mathbf{f}}(\mathbf{h})}{\partial\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} & L^{1}_{\mathbf{g_d}}L^{n-1}_{\mathbf{f}}(\mathbf{h})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{C} & \mathbf{0}\\ \mathbf{CA} & \mathbf{CB_d}\\ \mathbf{CA}^{2} & \mathbf{CAB_d}\\ \vdots & \vdots\\ \mathbf{CA}^{n} & \mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{B_d}\end{bmatrix} \quad \text{(پ-۱۵۹)}$$

بنابراین، بر مبنای شرایط مشاهده‌پذیری توأمان متغیرهای حالت و ورودی‌های نامعلوم، که در قضیه ۴ در بخش ۴.۳.۴ بیان شده‌است، سیستم مشاهده‌پذیر توأمان متغیرهای حالت و ورودی‌های نامعلوم است؛ اگر

$$\operatorname{rank}\left(\mathbf{O}_{\mathrm{nd}}\right)=\mathrm{n}+\mathrm{n}_{\mathrm{d}} \tag{پ-۱۶۰}$$

و

$$\operatorname{rank}\left(\left[\mathbf{O}_{\mathrm{nd}} \quad \mathbf{W}_{\mathbf{d}}^{\prime}\right]\right)=\mathrm{n}+\mathrm{n}_{\mathrm{d}}+\operatorname{rank}\left(\mathbf{W}_{\mathbf{d}}^{\prime}\right) \tag{پ-۱۶۱}$$

برقرار باشد. این نتایج مطابق با تئوری مشاهده‌پذیری توأمان متغیرهای حالت و ورودی‌های نامعلوم برای یک سیستم خطی هستند.

تحلیل نتایج قضایای مشاهده‌پذیری سیستم غیرخطی افاین برای یک سیستم غیرخطی: در این بخش، مشاهده‌پذیری متغیرهای حالت، مشاهده‌پذیری قوی، مشاهده‌پذیری ورودی نامعلوم و مشاهده‌پذیری متغیر حالت و ورودی نامعلوم برای یک سیستم غیرخطی بر مبنای قضایای ۹ تا ۱۲، که در بخش ۳.۴ بیان شده‌است، بررسی می‌شود. سیستم غیرخطی به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1 x_2\, d_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2^2 - x_2^3 + x_2\, d_1 + d_2 \end{cases} \tag{پ-۱۶۲}$$

در رابطه فوق، d_1 و d_2 بیانگر ورودی‌های نامعلوم هستند. همچنین، مدل اندازه‌گیری به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$z = x_1^2 \tag{پ-۱۶۳}$$

اینجا،

$$\mathbf{f}=\begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 - x_2^2 - x_2^3 \end{bmatrix};\mathbf{g}_{\mathbf{d}}=\begin{bmatrix} 0 & x_1 x_2 \\ x_2 & 1 \end{bmatrix};\mathbf{h}=x_1^2 \tag{پ-۱۶۴}$$

تحلیل مشاهده‌پذیری متغیر حالت: به‌منظور بررسی مشاهده‌پذیری محلی متغیرهای حالت در نقطه $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{X}$، مشتقات لی خروجی و ماتریس $\mathbf{O}_{\mathrm{n}}$ بر طبق معادلات (۵۳.۴) و (۵۴.۴) به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{l}_{\mathrm{n}}(\mathbf{x}_0)=\begin{bmatrix} L_{\mathbf{f}}^0(\mathbf{h}) \\ L_{\mathbf{f}}^1(\mathbf{h}) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1^2 \\ 2x_1 x_2 \end{bmatrix} \tag{پ-۱۶۵}$$

$$\mathbf{O}_{\mathrm{n}}=\begin{bmatrix} 2x_1 & 0 \\ 2x_2 & 2x_1 \end{bmatrix} \tag{پ-۱۶۶}$$

دترمینان $\mathbf{O}_{\mathrm{n}}$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\det(\mathbf{O}_{\mathrm{n}}) = 4x_1^2 \qquad \text{(پ-۱۶۷)}$$

از آنجا که دترمینان $\mathbf{O}_{\mathrm{n}}$ تنها در $x_1 = 0$ صفر است؛ فلذا، متغیرهای حالت سیستم غیرخطی در تمام نقاط بجز در همسایگی $x_1 = 0$ مشاهده‌پذیر است.

تحلیل مشاهده‌پذیری قوی: به‌منظور بررسی مشاهده‌پذیری قوی محلی متغیرهای حالت در نقطه $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{X}$، $\mathbf{W_d}$ و $[\mathbf{O}_{\mathrm{n}} \quad \mathbf{W_d}]$ بر طبق معادلات (۵۶.۴) و (۵۷.۴) به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\mathbf{W_d} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ L^1_{\mathbf{g_d}}(\mathbf{h}) & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2x_1^2x_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(پ-۱۶۸)}$$

$$[\mathbf{O}_{\mathrm{n}} \quad \mathbf{W_d}] = \begin{bmatrix} 2x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2x_2 & 2x_1 & 0 & 2x_1^2x_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(پ-۱۶۹)}$$

رنک ماتریس $\mathbf{W_d}$ در تمام نقاط به‌استثنا $x_1x_2 = 0$ برابر ۱ و رنک ماتریس $[\mathbf{O}_{\mathrm{n}} \quad \mathbf{W_d}]$ در تمام نقاط به‌استثنا $x_1x_2 = 1$ و $x_1x_2 = 0$ برابر ۳ است. بنابراین، عبارت $\mathrm{rank}([\mathbf{O}_{\mathrm{n}} \quad \mathbf{W_d}]) - \mathrm{rank}(\mathbf{W_d}) = 2$ در تمام نقاط به‌استثنا $x_1x_2 = 0$ و $x_1x_2 = 1$ برقرار است. همچنین، رنک ستونی ماتریس $\mathbf{O}_{\mathrm{n}}$ در تمام نقاط به‌استثنا $x_1 = 0$ کامل است. فلذا، سیستم غیرخطی مشاهده‌پذیر قوی در تمام نقاط بجز در همسایگی $x_1x_2 = 0$ و $x_1x_2 = 1$ است. به عبارت دیگر، متغیرهای حالت ابتدایی سیستم غیرخطی می‌تواند به‌ازای تمام ورودی‌های نامعلوم d_1 و d_2 و سایر نقاط به‌استثنا همسایگی $x_1x_2 = 0$ و $x_1x_2 = 1$ بازیابی شود.

تحلیل مشاهده‌پذیری ورودی‌های نامعلوم: به‌منظور بررسی مشاهده‌پذیری محلی ورودی‌های نامعلوم در نقطه $\mathbf{d}_0 \in \mathbf{D}$، $\mathbf{O_d}$، $\mathbf{W'_d}$ و $\mathbf{W_d} = [\mathbf{O}_{\mathrm{d}} \quad \mathbf{W'_d}]$ بر طبق معادلات (۶۰.۴) و (۶۱.۴) به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\mathbf{O_d} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ L^1_{\mathbf{g_d}}(\mathbf{h}) \\ L^1_{\mathbf{g_d}}L^1_{\mathbf{f}}(\mathbf{h}) + \dfrac{\partial L^1_{\mathbf{f}}L^1_{\mathbf{g_d}}(\mathbf{hd})}{\partial \mathbf{d}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2x_1^2x_2 \\ 2x_1x_2 & 6x_1x_2^2 + 2x_1 + 2x_1^3 - 2x_1^2x_2^2 - 2x_1^2x_2^3 \end{bmatrix} \qquad \text{(پ-۱۷۰)}$$

$$\mathbf{W'_d} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ L^1_{\mathbf{g_d}}(\mathbf{h}) & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2x_1^2x_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(پ-۱۷۱)}$$

$$\mathbf{W_d}=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ L^1_{\mathbf{g_d}}(\mathbf{h}) & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ L^1_{\mathbf{g_d}}L^1_{\mathbf{f}}(\mathbf{h})+\dfrac{\partial L^1_{\mathbf{f}}L^1_{\mathbf{g_d}}(\mathbf{hd})}{\partial \mathbf{d}} & L^1_{\mathbf{g_d}}(\mathbf{h}) & \mathbf{0}\end{bmatrix}= \tag{پ-۱۷۲}$$

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2x_1^2x_2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 2x_1x_2 & 6x_1x_2^2+2x_1+2x_1^3-2x_1^2x_2^2-2x_1^2x_2^3 & 0 & 2x_1^2x_2 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

رنک ماتریس‌های $\mathbf{O_d}$ و $\mathbf{W'_d}$ در تمام نقاط به‌استثنا $x_1x_2=0$ به‌ترتیب برابر ۲ و ۱ است. همچنین، رنک ماتریس $\mathbf{W_d}$ در تمام نقاط به‌استثنا $x_1=1$ و $x_1x_2=0$ برابر با ۳ است. بنابراین، رنک ستونی ماتریس $\mathbf{O_d}$ در تمام نقاط به‌استثنا $x_1x_2=0$ کامل است و عبارت $\operatorname{rank}(\mathbf{W_d})-\operatorname{rank}(\mathbf{W'_d})=2$ در تمام نقاط به‌استثنا $x_1=1$ و $x_1x_2=0$ برقرار است. فلذا، ورودی‌های نامعلوم قابل بازیابی از خروجی‌های سیستم در تمام نقاط به استثنا همسایگی $x_1=1$ و $x_1x_2=0$ هستند.

تحلیل مشاهده‌پذیری توأمان متغیرهای حالت و ورودی‌های نامعلوم: به‌منظور بررسی مشاهده‌پذیری محلی توأمان متغیرهای حالت و ورودی‌های نامعلوم در نقطه $\mathbf{x}_0\in\mathbf{X}$ و $\mathbf{d}_0\in\mathbf{D}$ ماتریس‌های $\mathbf{O}_{\text{nd}}$ و $\begin{bmatrix}\mathbf{O}_{\text{nd}} & \mathbf{W'_d}\end{bmatrix}$ بر طبق معادلات (۶۵.۴) و (۶۶.۴) به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\mathbf{O}_{\text{nd}}=\begin{bmatrix}\left.\dfrac{\partial L^0_{\mathbf{f}}(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} & \mathbf{0}\\ \left.\dfrac{\partial L^1_{\mathbf{f}}(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} & L^1_{\mathbf{g_d}}(\mathbf{h})\\ \left.\dfrac{\partial L^2_{\mathbf{f}}(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} & L^1_{\mathbf{g_d}}L^1_{\mathbf{f}}(\mathbf{h})+\dfrac{\partial L^1_{\mathbf{f}}L^1_{\mathbf{g_d}}(\mathbf{hd})}{\partial \mathbf{d}}\end{bmatrix}= \tag{پ-۱۷۳}$$

$$\begin{bmatrix}2x_1 & 0 & 0 & 0\\ 2x_2 & 2x_1 & 0 & 2x_1^2x_2\\ 4x_1-2x_2^2-2x_2^3 & 4x_2-4x_1x_2-6x_1x_2^2 & 2x_1x_2 & 6x_1x_2^2+2x_1+2x_1^3-2x_1^2x_2^2-2x_1^2x_2^3\end{bmatrix}$$

(پ-۱۷۴)

$$\begin{bmatrix}\mathbf{O}_{\text{nd}} & \mathbf{W'_d}\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}2x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 2x_2 & 2x_1 & 0 & 2x_1^2x_2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 4x_1-2x_2^2-2x_2^3 & 4x_2-4x_1x_2-6x_1x_2^2 & 2x_1x_2 & 6x_1x_2^2+2x_1+2x_1^3-2x_1^2x_2^2-2x_1^2x_2^3 & 0 & 2x_1^2x_2 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

رنک ماتریس $\mathbf{O}_{\mathrm{nd}}$ در تمام نقاط به‌استثنا $x_1x_2=0$ برابر ۴ و رنک ماتریس $\left[\mathbf{O}_{\mathrm{nd}} \quad \mathbf{W}'_{\mathbf{d}}\right]$ در تمام نقاط به استثنا $x_1x_2=0$ و $x_1=1$ برابر با ۵ است. بنابراین، رنک ستونی ماتریس $\mathbf{O}_{\mathrm{nd}}$ در تمام نقاط به‌استثنا $x_1x_2=0$ کامل است و عبارت $\mathrm{rank}\left(\left[\mathbf{O}_{\mathrm{nd}} \quad \mathbf{W}'_{\mathbf{d}}\right]\right)-\mathrm{rank}\left(\mathbf{W}'_{\mathbf{d}}\right)=4$ در تمام نقاط به استثنا $x_1=1$ و $x_1x_2=0$ برقرار است. فلذا، متغیرهای حالت و ورودی‌های نامعلوم توأمان قابل بازیابی از خروجی‌های سیستم در تمام نقاط به استثنا همسایگی $x_1=1$ و $x_1x_2=0$ هستند.

پیوست خ: تحلیل مشاهده‌پذیری پرنده بر مبنای انواع سنسورها

جدول پ-۸: تحلیل مشاهده‌پذیری مبتنی بر سنسورهای مختلف بکاربرده شده در پرنده.

شماره	سنسور	خروجی	تعداد خروجی	ورودی نامعلوم	مشاهده‌پذیری متغیر حالت	مشاهده‌پذیری قوی	مشاهده‌پذیری ورودی نامعلوم	مشاهده‌پذیری توأمان متغیر حالت و ورودی نامعلوم
۱	ارتفاع‌سنج	h	۱۲	u_w, v_w, w_w	√	√	√	√
	GPS	p_n, p_e, u, v, w		u_w, v_w, w_w p_w, q_w, r_w	√	√	√	√
	AHRS	$p, q, r, \phi, \theta, \psi$						
۲	GPS	p_n, p_e, u, v, w	۱۱	u_w, v_w, w_w	×	×	×	×
	AHRS	$p, q, r, \phi, \theta, \psi$		u_w, v_w, w_w $p_w, q_w,$	×	×	×	×

				r_w				
۳	ارتفاع‌سنج	h	۱۰	u_w, v_w, w_w	×	×	×	×
	شتاب سنج	u, v, w		u_w, v_w, w_w p_w, q_w, r_w	×	×	×	×
	AHRS	p, q, r, ϕ, θ, ψ						
۴	ارتفاع‌سنج	H	۱۰	u_w, v_w, w_w	√	√	√	√
	Air Data	u, v, w						
	GPS	p_n, p_e		u_w, v_w, w_w p_w, q_w, r_w	√	×	√	√
	مغناطیس سنج	ψ						
	جایرو نرخی	p, q, r						
۵	ارتفاع‌سنج	H	۹	u_w, v_w, w_w	×	×	×	×
	Air Data	u, v, w						
	GPS	p_n, p_e		u_w, v_w, w_w p_w, q_w, r_w	×	×	×	×
	جایرو نرخی	p, q, r						

پیوست د: تخمین باد با استفاده از فیلتر کالمن توسعه‌یافته مقاوم

در این بخش، از روش فیلتر کالمن توسعه‌یافته مقاوم به‌منظور تخمین مدل باد و متغیرهای حالت در یک پرنده بدون سرنشین بال‌ثابت استفاده می‌شود. به‌این‌منظور، فیلتر کالمن توسعه‌یافته مقاوم به‌منظور پوشش خطای مدل‌سازی و عدم قطعیت نویز مدل باد طراحی می‌شود. سپس، فیلتر کالمن توسعه‌یافته مقاوم از خروجی همراه با نویز سنسورها برای تخمین مدل باد و همچنین، متغیرهای حالت پرنده استفاده می‌کند. در نهایت، عملکرد فیلتر کالمن توسعه‌یافته مقاوم به‌منظور تخمین مدل باد با انجام شبیه‌سازی بررسی می‌شود. نتایج حاکی از عملکرد مناسب روش فیلتر کالمن توسعه‌یافته مقاوم به‌منظور تخمین مدل باد است.

پیشینه پژوهش فیلتر مقاوم: پس از موفقیت فیلتر کالمن در دهه ۱۹۶۰ در صنعت هوافضا، استفاده گسترده‌ای از این فیلتر در دهه ۱۹۷۰ شروع شد. فیلتر کالمن به‌منظور اجرا نیاز به دانستن مشخصاتی از سیستم همچون میانگین و همبستگی نویزهای فرآیند و خروجی، مقادیر کواریانس نویزهای فرآیند و خروجی و نیز مدل فضای حالت سیستم در هر لحظه از زمان نمونه‌بردرای دارد. همچنین، در صورتیکه نویزهای فرآیند و خروجی گوسی باشند، فیلتر کالمن خطای واریانس تخمین را کمینه می‌کند. پس اگر چه این فیلتر خطای واریانس تخمین را کمینه می‌کند؛ اما هیچ تضمینی برای کمینه‌کردن خطای واریانس در بدترین حالت را ندارد.

در بسیاری از کاربردهای صنعتی یک عدم انطباق بین فرضیات فیلتر کالمن و مسئله تخمین متغیرهای حالت وجود دارد. به‌عنوان نمونه، می‌توان به عدم وجود مدل یک سیستم به‌صورت دقیق برای مسائل صنعتی و عدم درک صحیح از مشخصه‌های آماری نویز فرآیند اشاره کرد. به‌منظور حل این مشکل دو روش پیشنهاد می‌شود. در روش اول، از فیلتر کالمن با وجود عدم برقراری فرضیات آن استفاده می‌شود. این روش در بسیاری از کاربردها استفاده می‌شود. در روش دوم، از فیلترهای که هیچ فرضی

درباره نویز نداشته و خطای بدترین حالت را کمینه می‌کنند، استفاده می‌شود. این دسته از فیلترها به‌عنوان فیلترهای مقاوم[125] [۱۴۶] شناخته می‌شود.

از این‌رو، مهندسان پس از ارزیابی ماهیت و نقش فیلتر کالمن، در دهه ۱۹۸۰ فیلترهای مقاوم را به‌منظور پوشش خطای مدل‌سازی و عدم‌قطعیت نویز ابداع کردند ([۱۴۷]، [۱۴۸] و [۱۴۹]). در این دسته از فیلترها هیچ‌گونه فرضی در مورد نویزهای فرآیند و اندازه‌گیری وجود ندارد. هر چند اگر اطلاعات مربوط به نویزهای فرآیند و اندازه‌گیری موجود باشند، می‌توانند در این فیلترها استفاده شوند. از آنجا که هدف از این فیلترها، یافتن تخمین متغیرهای حالت به‌گونه‌ای است که بیشینه خطای تخمین را کمینه کنند. از این‌رو، این فیلترها را فیلتر نورم بی‌نهایت[126] یا کمینه-بیشینه[127] می‌نامند [۱۵۰]. فیلترهای مقاوم در مواردی هم‌چون غیرقابل پیش‌بینی بودن تغییرات مدل، غیرقابل پیش‌بینی بودن منابع نویز، مشخص‌نبودن مدل سیستم، اهمیت تضمین حاشیه پایداری سیستم، زمان‌بر یا پیچیده‌بودن فرآیند شناسایی مدل سیستم استفاده می‌شود [۱۵۱]. بعضی از تئوری‌های مربوط به فیلترهای مقاوم توسط آقای مایک گریمبل[128] ([۱۵۲]، [۱۵۳] و [۱۵۴]) و آقای شیکد[129] [۱۵۵] توسعه داده شده‌اند. همچنین، فیلترهای غیرخطی مقاوم نیز به‌منظور تخمین متغیرهای حالت در سیستم‌های غیرخطی توسط آقای ریف[130] ابداع شده‌است [۱۵۶].

از آنجا که، نویز در فیلتر مقاوم غیرواقعی درنظر گرفته می‌شود، لذا فیلترهای ترکیبی کالمن-مقاوم[131] ایجاد شده‌است [۱۵۷]. این فیلتر بهترین تخمین متغیرهای حالت را با کمینه‌کردن ترکیبی از عملکردهای فیلتر کالمن و مقاوم می‌یابد. همچنین، به‌دلیل وجود عدم‌قطعیت در مدل، نسل جدید از

[125] Robust Filter

[126] H_∞ Filter

[127] Minimax Filter

[128] Mike Grimble

[129] Shaked

[130] Reif

[131] Mixed Kalman/ H^∞ Filter

فیلترهای مقاوم به‌نام فیلترهای مقاوم ترکیبی کالمن- مقاوم[۱۳۲] ابداع شده‌است [۱۵۸]. از آنجا که برآورده‌شدن قیود مساوی یا نامساوی در متغیرهای حالت باعث بهبود عملکرد فیلترهای مقاوم می‌شود، لذا فیلترهای مقاوم مقید[۱۳۳] توسعه داده شده‌است [۱۵۹]. در سالیان گذشته تحقیقات زیادی نیز به‌منظور توسعه فیلترهای مقاوم انجام شده‌است. به‌عنوان نمونه، می‌توان به فیلترهای مقاوم مرتبه کاهش‌یافته[۱۳۴] ([۱۶۰]، [۱۶۱] و [۱۶۲])، مقاوم مرتبه کاهش‌یافته مقید[۱۳۵] [۱۶۳]، هموارسازی نورم بی‌نهایت[۱۳۶] ([۱۶۴]، [۱۶۵] و [۱۶۶]) و هموارسازی نورم بی‌نهایت مقاوم[۱۳۷] [۱۶۷] اشاره کرد. همچنین، پژوهش‌هایی به‌منظور استفاده از فیلترهای مقاوم در کاربردهای مختلف انجام شده‌است. به‌عنوان نمونه، می‌توان به استفاده از این فیلترها در حوزه شناسایی سیستم اشاره کرد ([۱۶۸]، [۱۶۹] و [۱۷۰]).

فیلتر کالمن توسعه یافته مقاوم: در بسیاری از کاربردهای صنعتی یک عدم انطباق بین فرضیات فیلتر کالمن و مسئله تخمین متغیرهای حالت وجود دارد. به‌عنوان نمونه، می‌توان به عدم وجود مدل یک سیستم به‌صورت دقیق برای مسائل صنعتی و عدم درک صحیح از مشخصه‌های آماری نویز فرآیند اشاره کرد. به‌منظور حل این مشکل، از فیلترهای مقاوم [۱۰۷]، که هیچ فرضی درباره نویز نداشته و خطای بدترین حالت را کمینه می‌کنند، استفاده می‌شود. معادلات حاکم بر فیلتر کالمن توسعه‌یافته مقاوم به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\mathbf{K_k} = \mathbf{P_k}\left[\mathbf{I} - \theta\mathbf{P_k} + \mathbf{H_k^T} + \mathbf{H_k^T}\mathbf{R_k^{-1}}\mathbf{H_k}\mathbf{P_k}\right]^{-1}\mathbf{H_k^T}\mathbf{R_k} \quad (\text{پ-۱۷۵})$$

$$\mathbf{\hat{x}_{k+1}} = \mathbf{F_k}\mathbf{\hat{x}_k} + \mathbf{F_k}\mathbf{K_k}(\mathbf{y} - \mathbf{H_k}\mathbf{\hat{x}_k}) \quad (\text{پ-۱۷۶})$$

$$\mathbf{P_{k+1}} = \mathbf{F_k}\mathbf{P_k}\left[\mathbf{I} - \theta\mathbf{P_k} + \mathbf{H_k^T} + \mathbf{H_k^T}\mathbf{R_k^{-1}}\mathbf{H_k}\mathbf{P_k}\right]^{-1}\mathbf{F_k^T} + \mathbf{Q_k} \quad (\text{پ-۱۷۷})$$

---

[132] Robust Mixed Kalman/ H^∞ Filter

[133] Constraint H^∞ Filter

[134] Reduced-Order H^∞ Filter

[135] Constraint Reduced-Order H^∞ Filter

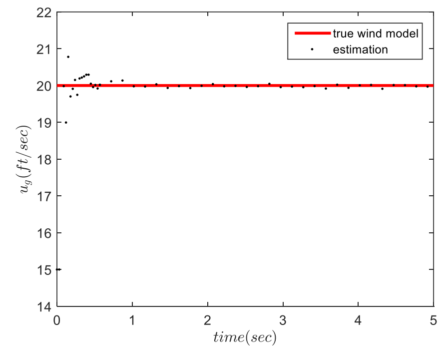
[136] H^∞ Smoothing

[137] Constraint H^∞ Smoothing

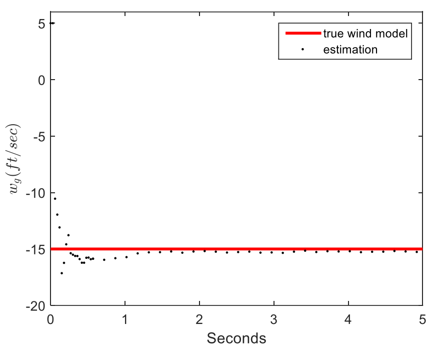
در روابط فوق، θ بیانگر محدوده کمینه‌کردن بیشینه خطای تخمین است. همچنین، در هر لحظه باید شرط مثبت معین‌بودن ماتریس زیر چک شود:

$$\mathbf{P}_{\mathbf{k}}^{-1}-\theta\mathbf{I}+\mathbf{H}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{T}}\mathbf{R}_{\mathbf{k}}\mathbf{H}_{\mathbf{k}}>0 \qquad (\text{پ-۱۷۸})$$

نتایج شبیه‌سازی: در این بخش، عملکرد فیلتر کالمن توسعه‌یافته به منظور تخمین مدل باد ثابت و همچنین، متغیرهای حالت پرنده در اشکال ۱ تا ۳ ارزیابی می‌شود. مقدار باد افقی تخمین‌زده شده پس از چندثانیه به مقدار باد افقی واقعی برابر با ۲۰ فوت بر ثانیه مطابق با شکل پ-۱ (الف) همگرا می‌شود. همچنین، مطابق با شکل پ-۱ (ب) مقدار باد عمودی تخمین‌زده شده پس از چندثانیه به باد عمودی واقعی برابر با ۱۵- فوت بر ثانیه همگرا می‌شود. به علاوه، عملکرد فیلتر به‌منظور تخمین متغیر حالت ارتفاع در شکل پ-۲ نشان داده شده‌است. خطوط پر و نقطه‌چین به‌ترتیب بیانگر ارتفاع واقعی و ارتفاع تخمین‌زده شده است. این نتایج حاکی از عملکرد مناسب فیلتر کالمن توسعه‌یافته مقاوم است.



(الف)

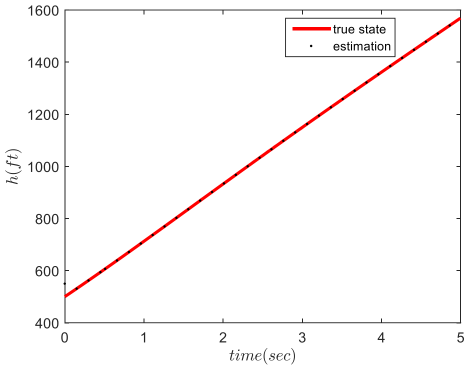


(ب)

شکل پ-۱ تخمین مولفه‌های سرعت باد الف) سرعت باد افقی ب) سرعت باد عمودی.

نتیجه‌گیری: در این پیوست، فیلتر کالمن توسعه‌یافته مقاوم به‌منظور تخمین مدل باد و متغیرهای حالت در یک پرنده بدون سرنشین بال‌ثابت ارائه شد. به این منظور، ابتدا دینامیک پرنده و سپس پدیده باد به‌عنوان عامل تاثیرگذار در مسئله پرواز پرنده بدون سرنشین بال‌ثابت مدل‌سازی شد. در گام بعد، از روش فیلتر کالمن توسعه‌یافته مقاوم به‌منظور تخمین نوع مدل باد و نیز تخمین لحظه‌ای متغیرهای حالت استفاده شد. این روش در هر لحظه بهترین تخمین مدل باد را در حضور خطای مدل‌سازی و عدم

قطعیت نویز فرآیند پیدا می‌کند. نتایج شبیه‌سازی حاکی از کارآیی مناسب روش فیلتر کالمن توسعه‌یافته مقاوم به‌منظور تخمین مدل باد و متغیرهای پرنده در پرواز پرنده بدون سرنشین بال‌ثابت است.



شکل پ-۲ تخمین متغیر حالت ارتفاع.

پیوست ذ: فیلتر ابتکاری جدید توسعه‌یافته پیوسته توده‌ای مورچه‌ها

این بخش، به طراحی فیلتر ابتکاری مبتنی بر مدل دینامیکی سیستم به‌منظور استفاده در ساختار فیلتر چندمدلی می‌پردازد. یک فیلتر ابتکاری مساله تخمین را به یک مساله بهینه‌سازی ابتکاری تبدیل کرده و در این صورت، بهترین تخمین را در هر لحظه از زمان نمونه‌برداری پیدا می‌کند. در ادامه، فیلتر ابتکاری جدید شامل فیلتر ابتکاری توسعه‌یافته پیوسته توده‌ای مورچه‌ها (ECACF)[۱۳۸] معرفی می‌شوند.

فیلتر ابتکاری توسعه‌یافته پیوسته توده‌ای مورچه‌ها (ECACF) از ترکیب فیلتر پیوسته توده‌ای مورچه‌ها (CACF) [۱۴۳]-[۱۰۹] با فیلتر کالمن توسعه‌یافته (EKF) به منظور بهبود دقت و نرخ همگرایی فیلتر پیوسته توده‌ای مورچه‌ها (CACF) حاصل می‌شود. در این روش، هر مورچه در زمان اندازه‌گیری بر مبنای فیلتر کالمن توسعه‌یافته به‌روزرسانی شده و سپس حرکت مورچه‌ها با استفاده از توزیع فرمون بر مبنای فیلتر پیوسته توده‌ای مورچه‌ها انجام می‌شود. بنابراین، این فیلتر مشابه با اجرای یک فیلتر کالمن توسعه‌یافته برای هر مورچه و سپس حرکت در فضای حالت پس ازاندازه‌گیری است. شبه کد فیلتر ابتکاری توسعه‌یافته پیوسته توده‌ای مورچه‌ها در شکل پ-۳ نشان داده شده‌است.

در ابتدای حلقه داخلی، توزیع پیشین مورچه‌ها و ماتریس کواریانس متناظر با آن در فضای حالت منتشر می‌شود. سپس، موقعیت پسین مورچه‌ها بر مبنای فیلتر کالمن توسعه‌یافته محاسبه میشود تا خروجی جاری تخمین‌زده شود. در گام بعد، خروجی تخمین‌زده‌شده با بردار مشاهدات مقایسه شده و متناسب با آن به هر مورچه یک تابع هزینه اختصاص داده می‌شود. مورچه‌ها با استفاده از تجربیاتشان توزیع فرمون را در فضای حالت پیوسته به‌روز رسانی کرده و در نتیجه از موقعیت جاری‌شان به‌سمت مورچه با کمترین تابع هزینه حرکت می‌کنند. در نهایت، تخمین متغیرهای حالت یک سیستم غیرخطی با استفاده از اپراتور میانگین محاسبه می‌شود. در ادامه، این مراحل به‌صورت مفصل توضیح داده می‌شود.

[138] Extended Continuous Ant Colony Filter

مقداردهی اولیه: الگوریتم ECACF دارای چند پارامتر کنترلی شامل تعداد مورچه‌ها (N) و تعداد مورچه‌های منتخب (N_t) است که باید قبل از اجرای الگوریتم مقداردهی شوند. همچنین، موقعیت ابتدایی از مورچه jام ($\hat{\mathbf{x}}_0^j = \mathbf{x}_{0|-1}^j$) به‌صورت رندوم تولید شده و ماتریس کواریانس متناظر با آن ($\mathbf{P}_0^j = \mathbf{P}_{0|-1}^j$) به‌ازای j=1,…,N تولید می‌شوند.

انتشار: موقعیت مورچه j در زمان $k-1$ و در iامین تکرار حلقه داخلی با $\mathbf{x}_{k-1|k-1}^{i,j}$ نمایش داده می‌شود و به‌صورت زیر انتشار می‌یابد:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{i,j} = \mathbf{f}_{k-1}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^{i,j}, \boldsymbol{\omega}_{k-1}^{i,j}) \tag{پ-۱۷۹}$$

در رابطه فوق، $\boldsymbol{\omega}_{k-1}^{i,j}$ بیانگر بردار نویز است که به‌صورت رندوم بر مبنای تابع چگالی احتمال معلوم $\boldsymbol{\omega}_{k-1}$ تولید می‌شود. همچنین، کواریانس خطای تخمین پیشین مورچه jام در زمان k-1، که با $\mathbf{P}_{k-1|k-1}^{i,j}$ نمایش داده می‌شود، از رابطه زیر بر مبنای فیلتر کالمن توسعه یافته (EKF) منتشر می‌شود:

$$\mathbf{P}_{k|k-1}^{i,j} = \mathbf{F}_{k-1}^{i,j}\,\mathbf{P}_{k-1|k-1}^{i,j}\,\mathbf{F}_{k-1}^{i,j\,\mathrm{T}} + \mathbf{Q}_{k-1} \tag{پ-۱۸۰}$$

در رابطه فوق، $\mathbf{F}_{k-1}^{i,j}$ بیانگر ماتریس انتقال است که به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\mathbf{F}_{k-1}^{i,j} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^{i,j}} \tag{پ-۱۸۱}$$

به‌روز رسانی خروجی: پس از حاصل‌شدن اندازه‌گیری ($\mathbf{z}_k$) در زمان k، موقعیت پسین مورچه jام در زمان k ($\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{i,j}$) بر مبنای یک ترکیب خطی از موقعیت پیشین مورچه‌jام ($\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{i,j}$) و اختلاف بین اندازه‌گیری واقعی در زمان k ($\mathbf{z}_k$) و اندازه گیری پیش‌بینی‌شده ($\hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}^{i,j}$) به‌صورت زیر برطبق معادله به‌روزرسانی خروجی فیلتر کالمن توسعه‌یافته به‌روزرسانی می‌شود:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{i,j} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{i,j} + \mathbf{K}_k^{i,j}\left[\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}^{i,j}\right] \tag{پ-۱۸۲}$$

در رابطه فوق، $\hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}^{i,j}$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}^{i,j} = \mathbf{h}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{i,j}) \tag{پ-۱۸۳}$$

و $\mathbf{K}_k^{i,j}$ بیانگر بهره کالمن برای مورچه j-ام در زمان k است که از رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\mathbf{K}_k^{i,j} = \mathbf{P}_{k|k-1}^{i,j} \mathbf{H}_k^{i,j^{\mathrm{T}}} (\mathbf{H}_k^{i,j} \mathbf{P}_{k|k-1}^{i,j} \mathbf{H}_k^{i,j^{\mathrm{T}}} + \mathbf{R}_k) \tag{پ-۱۸۴}$$

همچنین، $\mathbf{H}_k^{i,j}$ بیانگر ماتریس مشاهدات است که به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\mathbf{H}_{k-1}^{i,j} = \left.\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{i,j}} \tag{پ-۱۸۵}$$

در نهایت، خروجی تخمین‌زده‌شده توسط مورچه j-ام در زمان k و در i-امین تکرار حلقه داخلی به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\hat{\mathbf{z}}_{k|k}^{i,j} = \mathbf{h}_k (\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{i,j}) \tag{پ-۱۸۶}$$

محاسبه تابع هزینه: به هر مورچه یک تابع هزینه بر مبنای کیفیت تخمین مبتنی بر مربع خطای بین اندازه‌گیری واقعی ($\mathbf{z}_k$) و خروجی تخمین‌زده‌شده مورچه ($\hat{\mathbf{z}}_{k|k}^{i,j}$) محاسبه می‌شود. از این‌رو، تابع هزینه مورچه j-ام در زمان k و i-امین تکرار حلقه داخلی به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$c_k^{i,j} = \left(\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_{k|k}^{i,j}\right)^{\mathrm{T}} \left(\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_{k|k}^{i,j}\right) \tag{پ-۱۸۷}$$

در این‌صورت، تابع هزینه در نقاط مختلفی از فضا محاسبه شده و اطلاعات آن در مساله تخمین متغیرهای حالت استفاده می‌شود.

حرکت مورچه‌ها: مورچه‌ها در هر بار تکرار حلقه داخلی از موقعیت جاری‌شان بر مبنای توزیع فرمون به مقصد بعدی حرکت می‌کنند. این حرکت مشابه با الگوریتم بهینه‌سازی توده‌ای مورچه‌ها با استفاده از تابع توزیع نرمال زیر مدل‌سازی می‌شود:

$$\tau(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \left|\mathbf{P}_{k|k}^{i}\right|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(\frac{-\left(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{i,j_{\min}}\right)^{\mathrm{T}} \left(\mathbf{P}_{k|k}^{i}\right)^{-1} \left(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{i,j_{\min}}\right)}{2} \right) \tag{پ-۱۸۸}$$

در رابطه فوق، $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{i,j_{\min}}$ بیانگر بهترین نقطه یافت‌شده در حلقه داخلی i-ام و در زمان k است. همچنین، n نشان‌دهنده تعداد متغیرهای حالت است. به علاوه، $\mathbf{P}_{k|k}^{i}$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{P}_{k|k}^{i}=\begin{bmatrix}\left(\sigma_k^i\right)_1^2 & \dots & \dots & \dots & 0\\ 0 & \ddots & \dots & \dots & 0\\ \vdots & \dots & \left(\sigma_k^i\right)_p^2 & \dots & \vdots\\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & \dots & \dots & \left(\sigma_k^i\right)_n^2\end{bmatrix} \tag{پ-۱۸۹}$$

در رابطه فوق، $(\sigma_k^i)_p^2$ بیانگر واریانس تابع توزیع فرمون نرمال برای هر بعد p است که بـه تجمـع سـایر نقاط خوب حول بهترین نقطه وابسته است. این پارامتر، بر اساس رابطه زیر و بر مبنای واریانس وزن‌دار، که در مرجع پیشنهاد شده است، محاسبه می‌شود:

$$\left(\sigma_k^i\right)_p^2=\frac{\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{c_k^{i,j}-c_k^{i,j_{\min}}}\left[\left(\hat{x}_{k|k}^{i,j}\right)_p-\left(\hat{x}_{k|k}^{i,j_{\min}}\right)_p\right]^2}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{c_k^{i,j}-c_k^{i,j_{\min}}}} \tag{پ-۱۹۰}$$

در رابطه فوق، $\left(\hat{x}_{k|k}^{i,j}\right)_p$ و $\left(\hat{x}_{k|k}^{i,j_{\min}}\right)_p$ به‌ترتیب بیانگر مولفه‌های $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{i,j}$ و $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{i,j_{\min}}$ در هر بعد p اسـت. در این استراتژی، مرکز توزیع فرمون موقعیت بهترین مورچه است و نیز واریـانس آن بـه هزینـه نقـاط و تجمع آن‌ها حول بهترین نقطه وابسته است.

شرط توقف: الگوریتم دارای دو حلقه با شرایط توقف مجزا است. حلقه داخلی با رسیدن به بیشینه تعداد تکرار ($i_{\max}$) متوقف می‌شود و حلقه خارجی با اتمام مشاهدات به پایان می‌رسد.

تخمین: پس از اتمام حلقه داخلی، تخمین متغیرهای حالت بر مبنای میانگین موقعیت مورچه‌های برتـر به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k}=\frac{1}{N_t}\sum_{j=1}^{N_t}\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{i_{\max},j} \tag{پ-۱۹۱}$$

در معادله فوق، N_t بیانگر تعداد مورچه‌های برتر است. همچنین، ماتریس کواریانس با استفاده از روش انتگرال‌گیری مونت‌کارلو به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{P}_{k|k}=\frac{1}{N_t}\sum_{j=1}^{N_t}\left[\hat{\mathbf{x}}_{k|k}-\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{i_{\max},j}\right]\left[\hat{\mathbf{x}}_{k|k}-\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{i_{\max},j}\right]^{T} \tag{پ-۱۹۲}$$

Set the number of ants, N, and the number of top ants, N_t.
Initialize randomly the position of the ants, $\hat{\mathbf{x}}_0^j$, for $j \in$ [1,N].
Initialize the covariance of the ants, $\mathbf{P}_0^j$, for $j \in$ [1,N].
While (Measurements are available)
For i=1 to $i_{\max}$
For j=1 to N
Propagate the priori position of ant j, $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{i,j}$,
Compute the priori covariance, $\mathbf{P}_{k|k-1}^{i,j}$.
Compute the posteriori position of ant j, $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{i,j}$.
Estimate the current output, $\hat{\mathbf{z}}_{k|k}^{i,j}$.
Compute the cost function, $c_k^{i,j}$.
Next ant j
For p=1 to n
Compute the variance of the pheromone distribution, $\left(\sigma_k^i\right)_p^2$.
Next dimension p
Update the covariance matrix of the pheromone distribution, $\mathbf{P}_{k|k}^i$.
For j=1 to N
Move ants to the new destination, $\tilde{\mathbf{x}}_{k|k}^{i,j}$, using the normal PDF.
$\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^{i+1,j} = \tilde{\mathbf{x}}_{k|k}^{i,j}$.
$\mathbf{P}_{k-1|k-1}^{i+1,j} = \mathbf{P}_{k|k}^i$.
Next ant j
Next iteration i
Sort ants according to the cost.
Compute the mean position of N_t top ants, $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$.
Compute covariance, $\mathbf{P}_{k|k}$.
For j=1 to N
$\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}^{1,j} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^{i_{\max},j}$.
$\mathbf{P}_{k-1|k-1}^{1,j} = \mathbf{P}_{k|k}$.
Next ant j
Next time step k

شکل پ-۳ شبه کد الگوریتم ECACF.

پیوست ر: اعتبارسنجی فیلتر ابتکاری جدید توسعه‌یافته پیوسته توده‌ای مورچه‌ها

در این پیوست، عملکرد فیلتر ابتکاری جدید توسعه‌یافته پیوسته توده‌ای مورچه‌ها با حل یک مساله معیار غیرخطی و تخمین متغیرهای وضعیت یک استند آزمایشگاهی چهارپره صحت‌سنجی می‌شود.

مساله معیار: در این بخش، یک مدل غیرخطی به‌منظور بررسی عملکرد ECACF استفاده می‌شود. سپس، نتایج فیلتر ECACF با سایر فیلترهای ترکیبی غیرخطی هم‌چون ترکیب فیلتر ذرات با فیلتر کالمن توسعه‌یافته (EPF)[۱۳۹]، ترکیب فیلتر ذرات با فیلتر کالمن Unscented ‏(UPF)[۱۴۰] و فیلتر پیوسته توده‌ای مورچه‌ها (CACF)[۱۴۱] مقایسه می‌شود. سیستم تصادفی به‌صورت زیر بیان می‌شود [۱۷۶]-[۱۷۷]:

$$x_k = 1+\sin(\mathrm{w}\pi k)+\varphi_1 x_{k-1}+\omega_{k-1} \qquad (\text{پ-۱۹۳})$$

در رابطه فوق، ω_{k-1} بیانگر نویز فرآیند است. همچنین، w و φ_1 به‌ترتیب بیانگر 0.04 و 0.5 هستند. به‌علاوه، مدل اندازه‌گیری به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$z_k = \begin{cases} \varphi_2 x_k^2 + v_k & k \le 30 \\ \varphi_3 x_k - 2 + v_k & 30 < k \le 60 \end{cases} \qquad (\text{پ-۱۹۴})$$

در رابطه فوق، v_k بیانگر نویز اندازه‌گیری است. همچنین، پارامترهای φ_2 و φ_3 معادل با 0.2 و 0.5 هستند. متغیرحالت ابتدایی و کواریانس اولیه فیلتر به‌ترتیب برابر با $x_0=1$ و $P_0=2$ است. به‌علاوه، تعداد ذرات فیلترهای EPF و UPF برابر ۱۰۰ درنظر گرفته شده‌است. پارامترهای فیلتر ECACF در جدول پ-۹ بیان شده‌است.

---

[139] Extended Kalman Particle Filter

[140] Unscented Particle Filter

[141] Continuous Ant Colony Filter

به‌منظور بررسی عملکرد فیلتر ECACF، در اولین آزمایش، نویز فرآیند و در دومین آزمایش نویز اندازه‌گیری غیرگوسی درنظر گرفته می‌شود. ویژگی‌های نویز در جدول پ-۱۰ بیان شده‌است. آزمایش‌ها ۵۰۰ بار به‌منظور بررسی تاثیر اپراتور رندوم تکرار شده و میانگین نتایج گزارش می‌شود.

نتایج میانگین و واریانس خطای حداقل مربعات (RMSE)[۱۴۲] در جدول پ-۱۱ بیان می‌شود. همانطور که مشاهده می‌شود، نتایج فیلتر ECACF بهتر و قابل رقابت با سایر فیلترها است. همچنین، واریانس ECACF در مقایسه با سایر روش‌ها دارای کمترین مقدار است؛ در این صورت، بر اساس مرجع [۱۷۹] فیلتر دارای عملکرد پایدار است. همچنین، نمودار جعبه‌ای[۱۴۳] و هیستوگرام[۱۴۴] در شکل پ-۴ نشان داده شده‌است تا RMSE تمام فیلترها با یکدیگر مقایسه شوند. خط چین در نمودار جعبه‌ای بیانگر متوسط RMSE است. با توجه به این نمودار، قابلیت فیلتر ECACF مشاهده می‌شود.

جدول پ-۹: عملکرد ECACF.

پارامتر	مقدار	توصیف
N	10	تعداد مورچه‌ها
i_{max}	5	تعداد تکرار بیشینه
N_t	40%	درصد مورچه‌های منتخب

جدول پ-۱۰: مدل نویز مساله معیار.

شماره آزمایش	نویز فرآیند			نویز اندازه‌گیری		
	توزیع	پارامتر	مقدار	توزیع	پارامتر	مقدار
۱	گاما	Shape	3	گوسی	میانگین	0
[۱۷۷]-[۱۷۶]		Scale	2		واریانس	1×10^{-5}
۲	گوسی	میانگین	0	گاما	Shape	7
[۱۷۸]		واریانس	1×10^{-5}		Scale	2

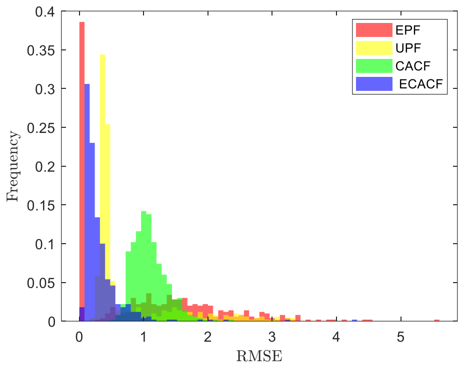
142 Root Mean Square Error

143 Box Plot

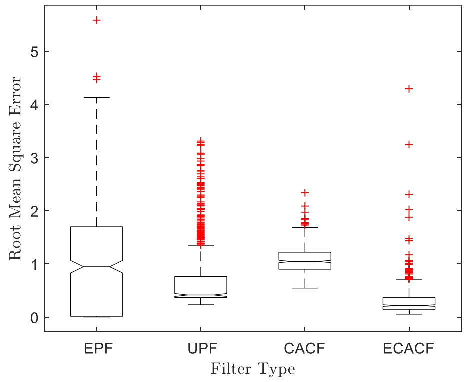
144 Histograms

جدول پ-۱۱: مقایسه میانگین و واریانس RMSE تشکیل شده از تکرار ۵۰۰ بار اجرا.

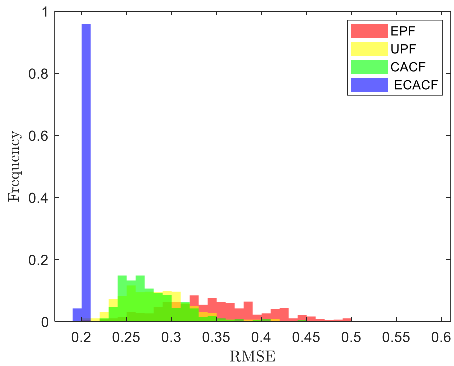
فیلتر	RMSE برای آزمایش ۱		RMSE برای آزمایش ۲	
	میانگین	واریانس	میانگین	واریانس
EPF	1.0326	1.0689	0.3463	0.0035
UPF	0.7525	0.4726	0.2816	0.0014
CACF	1.0861	0.0668	0.2813	0.0016
ECACF	0.3154	0.1142	0.2019	1.107e-6



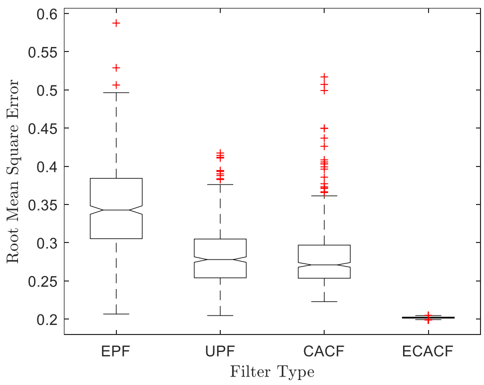
(الف)



(ب)



(ج)

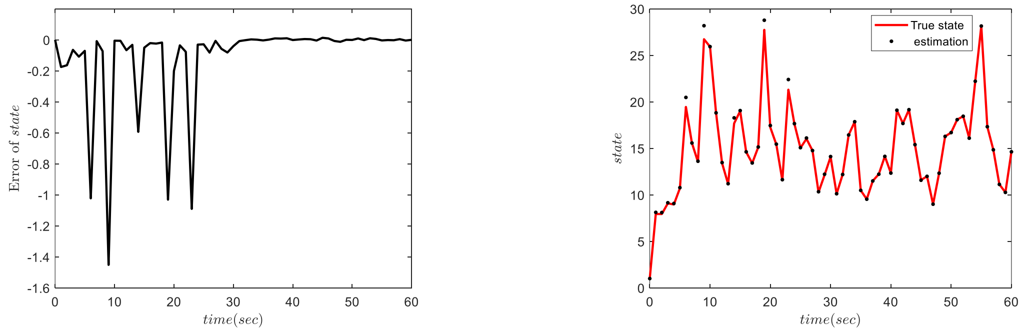


(د)

شکل پ-۴ مقایسه فیلتر ECACF حاصل از تکرار ۵۰۰ بار اجرا: الف و ب) آزمایش ۱ (نویز فرآیند غیرگوسی) ج و د) آزمایش ۲ (نویز اندازه‌گیری غیرگوسی).

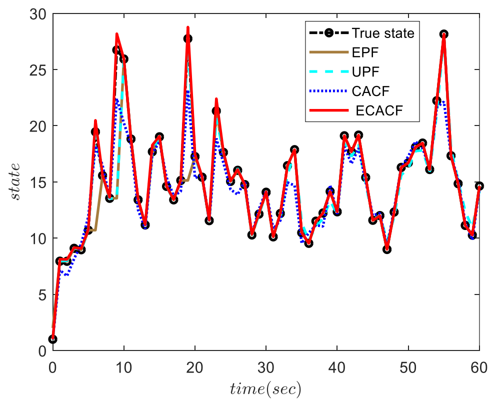
عملکرد فیلتر ECACF در یک اجرا در آزمایش اول (نویز فرآیند غیرگوسی) در شکل پ-۱۲ نشان داده شده‌است. در شکل پ-۵ (الف) متغیرحالت واقعی و تخمین زده شده مقایسه می‌شود. در

شکل پ-۵ (ب) خطای تخمین نشان داده می‌شود. نتایج بیانگر عملکرد مناسب الگوریتم پیشنهادی به‌منظور تخمین متغیرحالت سیستم غیرخطی در حضور نویز فرآیند غیرگوسی است. عملکرد فیلتر ECACF با سایر فیلترها در شکل پ-۶ مقایسه می‌شود. خروجی ECACF می‌تواند خروجی واقعی را بهتر از فیلترهای ابتکاری ردگیری کند. همچنین، مشاهده می‌شود که ترکیب فیلتر CACF با فیلتر EKF می‌تواند دقت CACF را بهبود دهد. عملکرد فیلتر ECACF در یک اجرا در آزمایش دوم (نویز اندازه‌گیری غیرگوسی) در شکل پ-۷ و شکل پ-۸ نشان داده شده‌است. نتایج فیلتر ECACF حاکی از عملکرد مناسب فیلتر در حضور نویز اندازه‌گیری غیرگوسی است.

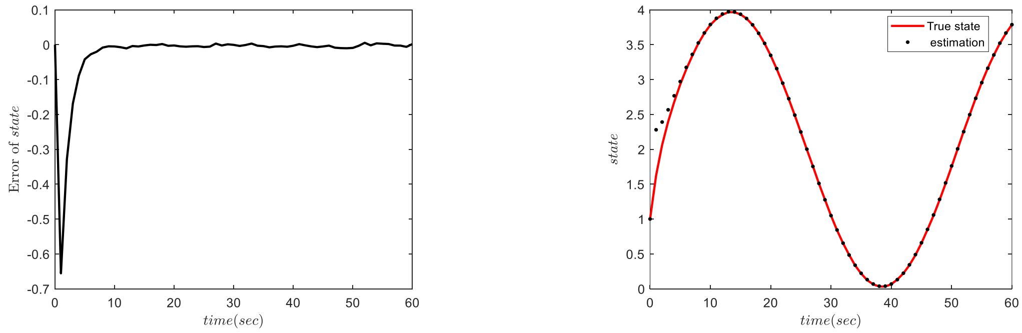


(ب) (الف)

شکل پ-۵ عملکرد فیلتر ECACF در حضور نویز فرآیند غیرگوسی: الف) مقدار واقعی در برابر مقدار تخمین‌زده شده ب) خطای تخمین.

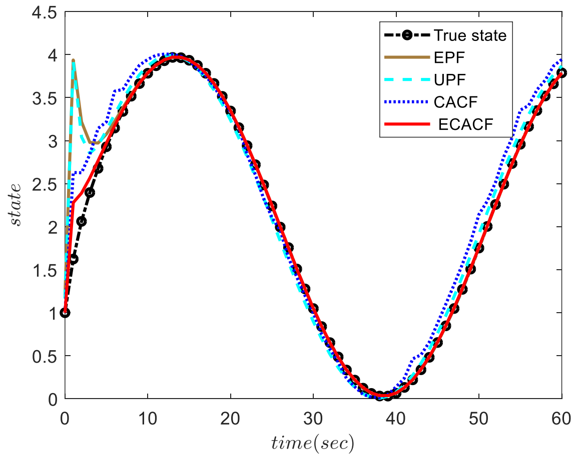


شکل پ-۶ مقایسه فیلتر ECACF با سایر فیلترها: تخمین متغیر حالت در حضور نویز فرآیند غیرگوسی.



(ب) (الف)

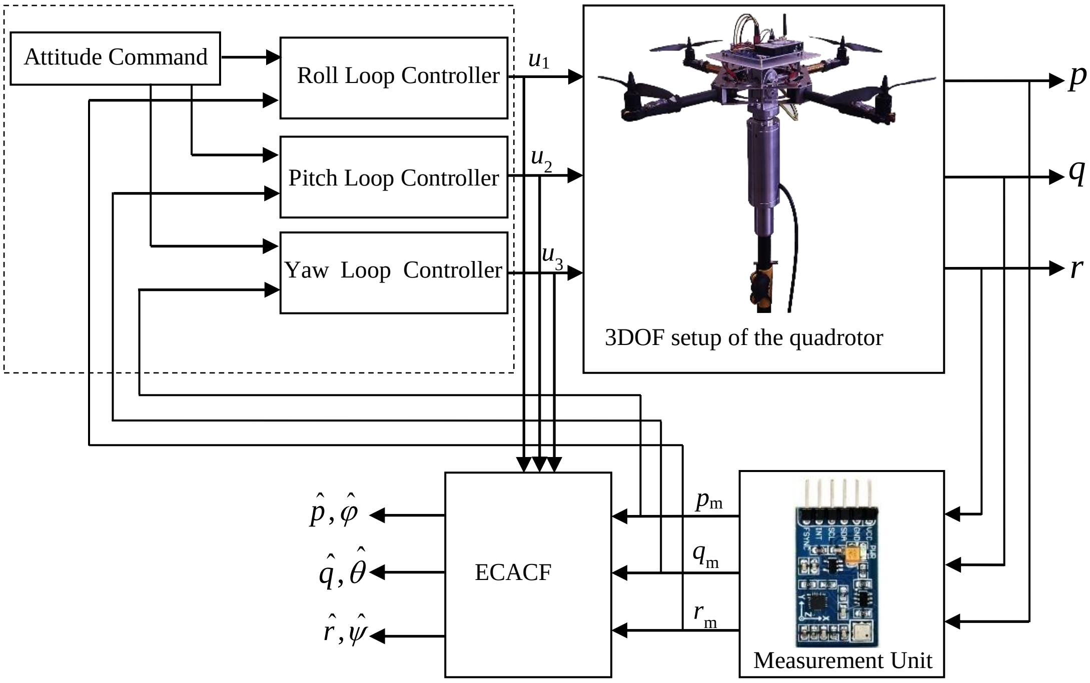
شکل پ-۷ عملکرد فیلتر ECACF در حضور نویز اندازه‌گیری غیرگوسی: الف) مقدار واقعی در برابر مقدار تخمین‌زده شده ب) خطای تخمین.



شکل پ-۸ مقایسه فیلتر ECACF با سایر فیلترها: تخمین متغیر حالت در حضور نویز اندازه‌گیری غیرگوسی.

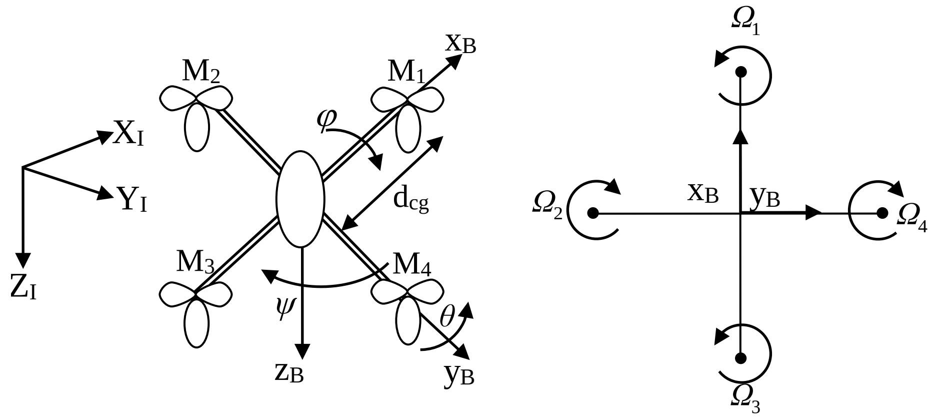
تخمین زمان حقیقی وضعیت برای یک استند آزمایشگاهی چهارپره: در این بخش، فیلتر ECACF بر روی یک استند آزمایشگاهی سه‌درجه‌آزادی چهارپره، که در شکل پ-۹ نشان داده شده‌است، پیاده سازی می‌شود. استند آزمایشگاهی سه‌درجه‌آزادی چهارپره قادر به دوران حول محورهای رول، پیچ و یاو است. فیلتر ECACF از خروجی‌های نویزی به‌منظور تخمین زمان حقیقی سرعت‌های زاویه‌ای و زوایای اویلر استفاده می‌کند. بلوک دیاگرام فرآیند تخمین در شکل پ-۱۰ نشان داده شده‌است.

شکل پ-۹ استند آزمایشگاهی سه‌درجه‌آزادی چهارپره.



شکل پ-۱۰ بلوک دیاگرام فرآیند تخمین.

ساختار چهارپره در شکل پ-۱۱ نشان داده شده است. هر روتور به‌صورت یک جسم صلب دوار حول محور z_B در سیستم مختصات بدنی با سرعت زاویه‌ای Ω دوران می‌کند. روتورهای ۱ و ۳ در یک جهت (خلاف جهت عقربه‌های ساعت) و روتورهای ۲ و ۴ در جهت مخالف (جهت عقربه‌های ساعت) به‌منظور حذف گشتاور یاو کل سیستم دوران می‌کنند.



شکل پ-۱۱ تعریف محورهای مختصات چهارپره.

مدل دینامیکی چهارپره بر مبنای قانون نیوتن به‌صورت زیر بیان می‌شود [۱۸۰]-[۱۸۱]:

$$\dot{p} = \frac{(\mathrm{I_{yy}} - \mathrm{I_{zz}})qr}{\mathrm{I_{xx}}} + \frac{u_1}{\mathrm{I_{xx}}} + q\,\frac{\mathrm{I_{rotor}}}{\mathrm{I_{xx}}}\,\Omega_r \quad \text{(پ-۱۹۵)}$$

$$\dot{q} = \frac{(\mathrm{I_{zz}} - \mathrm{I_{xx}})r\,p}{\mathrm{I_{yy}}} + \frac{u_2}{\mathrm{I_{yy}}} - p\,\frac{\mathrm{I_{rotor}}}{\mathrm{I_{yy}}}\,\Omega_r \quad \text{(پ-۱۹۶)}$$

$$\dot{r} = \frac{(\mathrm{I_{xx}} - \mathrm{I_{yy}})\,p\,q}{\mathrm{I_{zz}}} + \frac{u_3}{\mathrm{I_{zz}}} \quad \text{(پ-۱۹۷)}$$

در روابط فوق، (p, q, r) بیانگر سرعت‌های زاویـه‌ای و (φ, θ, ψ) نشـان‌دهنده زوایـای رول، پـیچ و یـاو هستند. ارتباط بین نرخ زوایای اویلر و نرخ سرعت‌های زاویه‌ای سیستم مختصات بدنی به‌صورت زیر بیان می‌شود [۱۸۲]:

$$\dot{\phi} = p + q\sin\phi\tan\theta + r\cos\phi\tan\theta \quad \text{(پ-۱۹۸)}$$

$$\dot{\theta} = q\cos\phi - r\sin\phi \quad \text{(پ-۱۹۹)}$$

$$\dot{\psi} = q\sin\phi\sec\theta + r\cos\phi\sec\theta \quad \text{(پ-۲۰۰)}$$

همچنین، $\mathrm{I_{xx}}$ ، $\mathrm{I_{yy}}$ و $\mathrm{I_{zz}}$ بیانگر ممان‌های اینرسی اصلی و $\mathrm{I_{rotor}}$ نشان‌دهنده ممان اینرسـی روتـور اسـت. Ω_r نیز سرعت زاویه‌ای کل روتور نامیده می‌شود، که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Omega_r = -\Omega_1 + \Omega_2 - \Omega_3 + \Omega_4 = \sum_{i=1}^{4}(-1)^i\,\Omega_i \quad \text{(پ-۲۰۱)}$$

ورودی‌های کنترلی u_1، u_2 و u_3 به‌ترتیب بیـانگر گشـتاورهای رول، پـیچ و یـاو هسـتند کـه توسـط روتورها تولید می‌شوند، از روابط زیر حاصل می‌شود [۱۸۰]:

$$u_1 = \mathrm{b\,d}_{cg}(\Omega_2^2 - \Omega_4^2) \qquad (\text{پ-۲۰۲})$$

$$u_2 = \mathrm{b\,d}_{\mathrm{cg}}(\Omega_1^2 - \Omega_3^2) \qquad (\text{پ-۲۰۳})$$

$$u_3 = \mathrm{d}(\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_3^2 - \Omega_4^2) \qquad (\text{پ-۲۰۴})$$

همچنین، b و d به‌ترتیب ضرایب تراست و درگ هستند. به علاوه، $\mathrm{d_{cg}}$، که در شکل پ-۱۱ نشان داده شده‌است، بیانگر فاصله افقی هر روتور از مرکز جرم پرنده است. بنابراین، بر طبق معادلات (پ-۲۰۲) تا (پ-۲۰۴)، فرامین سرعت‌زاویه‌ای می‌تواند به‌صورت زیر محاسبه شود [۱۸۱]:

$$\Omega_{\mathrm{c},1}{}^2 = \Omega_{\mathrm{mean}}^2 + \frac{1}{2\mathrm{b\,d_{CG}}}u_2 + \frac{1}{4\mathrm{d}}u_3 \qquad (\text{پ-۲۰۵})$$

$$\Omega_{\mathrm{c},2}{}^2 = \Omega_{\mathrm{mean}}^2 + \frac{1}{2\mathrm{b\,d_{CG}}}u_1 - \frac{1}{4\mathrm{d}}u_3 \qquad (\text{پ-۲۰۶})$$

$$\Omega_{\mathrm{c},3}{}^2 = \Omega_{\mathrm{mean}}^2 - \frac{1}{2\mathrm{b\,d_{CG}}}u_2 + \frac{1}{4\mathrm{d}}u_3 \qquad (\text{پ-۲۰۷})$$

$$\Omega_{\mathrm{c},4}{}^2 = \Omega_{\mathrm{mean}}^2 - \frac{1}{2\mathrm{b\,d_{CG}}}u_1 - \frac{1}{4\mathrm{d}}u_3 \qquad (\text{پ-۲۰۸})$$

در روابط فوق، Ω_{mean} بیانگر سرعت‌زاویه‌ای متوسط هر روتور است. پارامترهای چهارپره در جدول پ-۱۲ بیان شده‌است. در گام بعد، به‌منظور ایجاد مدل تصادفی چهارپره برای فرآیند تخمین، مدل یقینی، که در معادلات (پ-۱۹۵) تا (پ-۲۰۰) بیان شده‌است، با نویز فرآیند ترکیب می‌شود. در این‌صورت، با تعریف $x_1 = p$، $x_2 = q$، $x_3 = r$، $x_4 = \varphi$، $x_5 = \theta$ و $x_6 = \psi$، مدل تصادفی پرنده در فضای حالت به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\dot{x}_1 = \frac{(\mathrm{I_{yy}} - \mathrm{I_{zz}})x_2x_3}{\mathrm{I_{xx}}} + \frac{u_1}{\mathrm{I_{xx}}} + x_2\frac{\mathrm{I_{rotor}}}{\mathrm{I_{xx}}}\Omega_r + \omega_1 \qquad (\text{پ-۲۰۹})$$

$$\dot{x}_2 = \frac{(\mathrm{I_{zz}} - \mathrm{I_{xx}})x_1x_3}{\mathrm{I_{yy}}} + \frac{u_2}{\mathrm{I_{yy}}} - x_1\frac{\mathrm{I_{rotor}}}{\mathrm{I_{yy}}}\Omega_r + \omega_2 \qquad (\text{پ-۲۱۰})$$

$$\dot{x}_3 = \frac{(\mathrm{I_{xx}} - \mathrm{I_{yy}})x_1x_2}{\mathrm{I_{zz}}} + \frac{u_3}{\mathrm{I_{zz}}} + \omega_3 \qquad (\text{پ-۲۱۱})$$

$$\dot{x}_4 = x_1 + x_2\sin x_4\,\tan x_5 + x_3\cos x_4\,\tan x_5 + \omega_4 \qquad (\text{پ-۲۱۲})$$

$$\dot{x}_5 = x_2\cos x_4 - x_3\sin x_4 + \omega_5 \qquad (\text{پ-۲۱۳})$$

$$\dot{x}_6 = x_2\sin x_4\sec x_5 + x_3\cos x_4\sec x_5 + \omega_6 \qquad (\text{پ-۲۱۴})$$

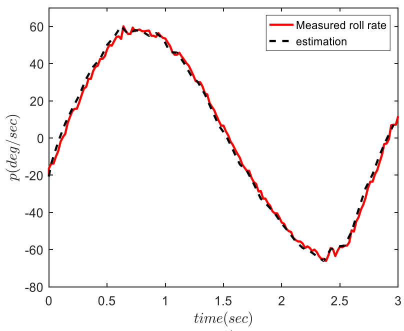
در روابط فوق، ω_i $(i=1,\ldots,6)$ بیانگر نویز فرآیند است، که به‌صورت متغیر رندوم گوسی با میانگین صفر مدل می‌شود. مدل اندازه‌گیری به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$z_1 = p_{\mathrm{m}} = x_1 + v_1 \qquad (\text{پ-۲۱۵})$$

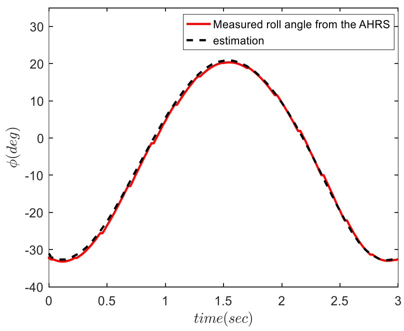
$$z_2 = q_{\mathrm{m}} = x_2 + v_2 \qquad (\text{پ-۲۱۶})$$

$$z_3 = r_{\mathrm{m}} = x_3 + v_3 \qquad (\text{پ-۲۱۷})$$

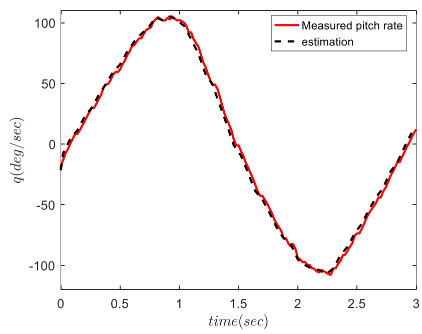
در روابط فوق، $v_i\,(i=1,...,3)$ بیانگر نویز اندازه‌گیری است، که به‌صورت نویز سفید گوسی با میانگین صفر مدل می‌شود. عملکرد فیلتر ECACF در تخمین زمان حقیقی تخمین مولفه‌های وضعیت چهارپره در شکل پ-۱۲ نشان داده شده است. این نتایج با خروجی سنسور AHRS به‌منظور اعتبارسنجی مقایسه می‌شود. عملکرد ECACF در تخمین زاویه رول و نرخ آن در شکل پ-۱۲ (الف) و شکل پ-۱۲ (ب) نشان داده شده است. شکل پ-۱۲ (الف) زاویه رول اندازه‌گیری شده و تخمین زده شده را مقایسه می‌کند. همچنین، شکل پ-۱۲ (ب) زاویه رول تخمین‌زده شده را با خروجی سنسور AHRS مقایسه می‌کند. نتایج مشابه برای کانال‌های پیچ در شکل پ-۱۲ (پ) و (ت) نشان داده شده‌است. همچنین، نتایج مشابه برای کانال‌های یاو در شکل پ-۱۲ (ث) و (ج) نشان داده شده‌است. این نتایج حاکی از توانایی پیاده‌سازی زمان حقیقی فیلتر ECACF است.



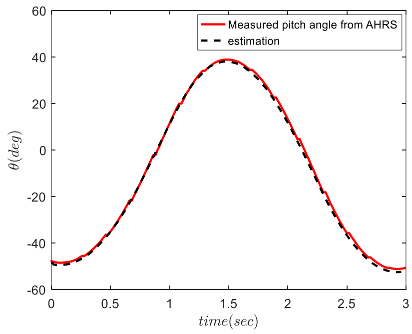
(الف)



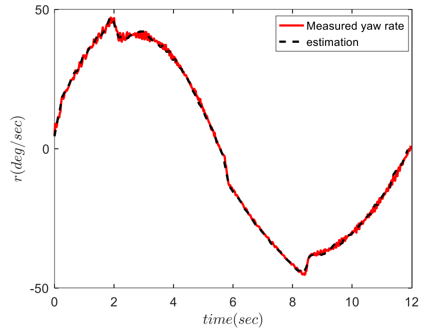
(ب)



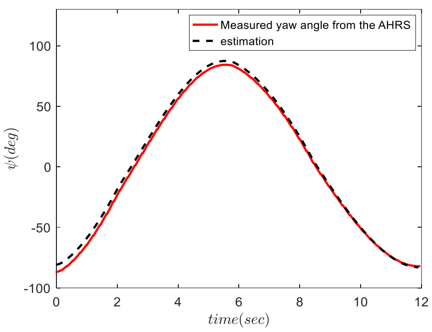
(پ)



(ت)



(ث)



(د)

شکل پ-۱۲ تخمین وضعیت زمان حقیقی با استفاده از فیلتر : الف) نرخ رول ب) زاویه رول پ) نرخ پیچ ت) زاویه پیچ ث) نرخ یاو ج) زاویه یاو.

جدول پ-۱۲: پارامترهای چهارپره.

پارامتر	واحد	مقدار	توصیف
d_{cg}	M	0.2	فاصله افقی از هر روتور
b	$Kg.m^2$	3×10^{-5}	فاکتور تراست
d	$Kg.m^2$	3×10^{-6}	فاکتور درگ
I_{xx}	$Kg.m^2$	0.028	ممان اینرسی حول محور x
I_{yy}	$Kg.m^2$	0.031	ممان اینرسی حول محور y
I_{zz}	$Kg.m^2$	0.044	ممان اینرسی حول محور z
I_{rotor}	$Kg.m^2$	8.3×10^{-5}	ممان اینرسی روتور
Ω_{mean}	RPM	2000	سرعت متوسط روتورها

پیوست ز: پارامترهای مرتبط با شبیه‌سازی فیلتر چندمدلی MMECACF

در این پیوست، پارامترهای مرتبط با شبیه‌سازی فیلتر چندمدلی MMECACF بیان می‌شود. به‌این‌منظور، مشتقات پایداری طولی پرنده ابتدا در جدول پ-۱۳ بیان شده‌است. همچنین، پارامترهای مایکروبرست در جدول پ-۱۴ نشان داده شده‌است. در نهایت، پارامترهای فیلتر چندمدلی MMECACF و ویژگی‌های تصادفی نویزهای فرآیند و اندازه‌گیری به‌ترتیب در جدول پ-۱۵ و جدول پ-۱۶ بیان شده‌است.

جدول پ-۱۳: مشتقات پایداری طولی پرنده.

پارامتر	واحد	مقدار	پارامتر	واحد	مقدار	پارامتر	واحد	مقدار
X_u	1/sec	-0.038	Z_u	1/sec	0.313	M_u	rad/ft/sec	-0.0211
X_w	1/sec	-0.0513	Z_w	1/sec	-0.605	M_w	rad/ft/sec	0.157
X_q	ft/rad/sec	0.00152	Z_q	ft/rad/sec	-0.041	M_q	1/sec	-0.612
X_e	ft/rad/sec^2	0.00005	Z_e	ft/rad/sec^2	-0.146	M_e	1/sec^2	0.459
X_t	ft/rad/sec^2	0.158	Z_t	ft/rad/sec^2	0.031	M_t	1/sec^2	0.0543

جدول پ-۱۴: پارامترهای مایکروبرست.

پارامتر	واحد	مقدار	توصیف
h_{max}	ft	394	ارتفاع بیشینه باد افقی
r_{max}	ft	3678.5	فاصله شعاعی از مرکز مایکروبرست
u_{max}	ft/sec	98.4	اندازه بیشینه باد افقی

جدول پ-۱۵: پارامترهای فیلترچندمدلی MMECACF.

واحد	پارامتر	توصیف
N	10	تعداد مورچه‌ها
i_{max}	5	بیشینه تعداد تکرار در هر گام زمانی
N_t	40%	درصد مورچه‌های منتخب
M	4	تعداد مدل‌های منتخب
Pr_0	$[0.25\ \ 0.25\ 0.25\ 0.25]^T$	احتمال ابتدایی هر فیلتر

جدول پ-۱۶: پارامترهای نویزهای فرآیند و اندازه‌گیری.

مدل	نویز: نویز فرآیند	نویز: نویز اندازه‌گیری
مدل پرنده	$\mathbf{Q} = \mathrm{diag}[1\quad 10\quad 1\quad 1\quad 1] \times 10^{-2}$	$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5e^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix}$
مدل ۱	$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & [0.1\mathbf{I}_{2\times2}] \end{bmatrix}$	
مدل ۲	$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & [0.01\mathbf{I}_{2\times2}] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & [0.01\mathbf{I}_{2\times2}] \end{bmatrix}$	
مدل ۳	$\mathbf{Q}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & 0 \\ \mathbf{0} & 0.1 \end{bmatrix}$	
مدل ۴	$\mathbf{Q}_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & [0.01\mathbf{I}_{2\times2}] \end{bmatrix}$	

Development and Implementation of Multiple Model Filters for Online Identification and Compensation of Atmospheric Disturbances in Automatic Landing of Fixed Wing UAV

Abstract

In this study, a multiple model wind estimator is proposed to detect the wind type and to estimate the wind components as well as the states of a fixed-wing UAV without any direct measurement of the air data. Then, the identified wind model and the estimated states are compensated in the heuristic nonlinear model predictive controller during landing phase. For this purpose, a static multiple model approach is taken, comprised of four independent extended Kalman filters, each one is estimating the wind based on one of the four wind models including a constant wind, a “1-cosine” model, a wind shear and a microburst.

Moreover, a new heuristic multiple model filter, called Multiple Model Extended Continuous Ant Colony Filter, is proposed to find the best wind model among a set of wind models and to estimate the states of the UAV. In this filter, a colony of virtual ants search the state space stochastically and dynamically for each model. Pheromone distribution attracts the ants toward the true model and the true states.

Then, observability of the states and the wind components are analyzed. Four new propositions are introduced and proved for unknown input observability, state and unknown input observability, the effect of time-varying unknown input matrix on the unknown input observability, and the effect of linearization errors on the state observability. Moreover, observability of the wind parameters is analyzed using the theory of nonlinear systems observability.

Performance of the proposed multiple model filters is also evaluated in maneuvering flight and compared to a single Kalman filter and a single extended continuous ant colony filter. The results show that the proposed approach provides excellent performance in estimating the states, the wind model and its parameters.

Then, the outputs of the proposed filtring algorithms are utilized and compensated in the heuristic nonlinear model predictive controller based on the particle swarm optimization. Moreover, stability of this controller is introduced and proved. Finally, a hardware-in-the-loop experiment is also performed to verify the real-time implementation capability of the suggested architectures. The results show that the proposed algorithm effectively improves the controller performance with the wind compensation and the UAV lands accurately.

Keywords: Unmanned Aerial Vehicle, Wind Model, Wind Estimation, Multiple Model Filters, Heuristic Filter, Nonlinear Observability, Model Predictive Controller, Hardware in the Loop.

Sharif University of Technology

Faculty of Aerospace Engineering

PHD. Thesis

Development and Implementation of Multiple Model Filters for Online Identification and Compensation of Atmospheric Disturbances in Automatic Landing of Fixed Wing UAV

By:

Alireza Sharifi

Supervisor:

Dr. Hadi Nobahari

July 2020